කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දූරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෘතීය පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2009 (පාඨමාලා ඒකක ක්‍රමය)

2013 ජූලි

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය - **PMAT E3043**

සංකීර්ණ විචල්‍ය

<u>ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.</u>

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 07 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 04 යි කාලය : පැය 02½ යි.

---

1. (අ) z තලයෙහි $|z| \leq 3\,,\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ මගින් නිරූපණය වන්නාවූ පෙදෙස නිර්ණය කරන්න.

   (ආ) $\log z = i\frac{\pi}{2}$ සමීකරණයෙහි සියලුම මූල සොයන්න.

   (ඇ) $w(z)$ යනු $w(z) = z^3 + z + 1$ මගින් දෙනු ලබන ශ්‍රිතය යැයි ගනිමු.

   (i) $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ආකාරයෙන් $w(z)$ ලියා දක්වන්න.

   (ii) පරිමිත z තලයෙහි සියලුම ලක්ෂ්‍යයන්හිදී කොෂි =රීමාන් සමීකරණ සපුරාලන බව පෙන්වන්න.

   (iii) $f'(z)$ නිර්ණය කරන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

2. (අ) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+4}{z-2i} & z \neq 2i \\ 3+4i & z = 2i \end{cases}$ යැයි ගනිමු.

(i) $\lim_{z\to 2i} f(z)$ පවතින බව සාධනය කර එම අගය නිර්ණය කරන්න.

(ii) $z = 2i$ හි දී ශ්‍රිතය සන්තතිකද? පැහැදිලි කරන්න.

(iii) $z \neq 2i$ හි දී ශ්‍රිතය සන්තතිකද? පැහැදිලි කරන්න.

(ආ) $f(z), D$ වසම තුල විශ්ලේෂී නම් සහ D තුල $Re(f(z))$=නියතයක් නම්,

$f=$ නියතයක් බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $\int_C f(z)\,dz$ ගණනය කරන්න : මෙහි $f(z) = \begin{cases} 1 & y < 0 \\ 4y & y > 0 \end{cases}$ මගින් අර්ථ

දක්වා ඇති අතර C යනු $y = x^3$ වක්‍රය දිගේ $z = -1 - i$ සිට $z = 1 + i$ දක්වා චාපය වේ.

3. (අ) $0 < |z-1| < 2$ සඳහා වලංගු වන $\frac{z}{(z-1)(z-3)}$ හි ලෝරන්ස් ප්‍රසාරණය සොයන්න.

(ආ) පහත එකිනෙක ශ්‍රිතයෙහි ඒකලිත අපූර්වතා ස්ථානීයගත කර වර්ගීකරණය කරන්න:

(i) $\frac{\sin(z^2)}{z^4}$ (ii) $\frac{1-\cos z}{z^2}$ (iii) $e^{\frac{z}{z-2}}$

(ඇ) $\sinh iz = i \sin z$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් $\frac{z-\sinh z}{z^2 \sinh z}$ ශ්‍රිතයෙහි $z = \pi i$ දී අවශිෂ්ඨය $\frac{i}{\pi}$ වන බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

4. කෝෂී අනුකල ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

(අ) $\oint_C \frac{2e^{2z}cosh^2z}{(z-i\pi)(z+3i\pi)}dz$ ගණනය කරන්න : මෙහි C යනු $|z| = 2\pi$ වෘත්තය වේ.

(ආ) C යනු $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ ඒකක වෘත්තය යැයි ගනිමු.

(i) ඕනෑම තාත්ත්වික a නියතයක් සඳහා $\int_C \frac{e^{az}}{z}dz = 2\pi i$ වන බව පෙන්වන්න.

(ii) (i) හි ලබා ගත් සමීකරණය θ විෂයෙන් ලිවීමෙන් $\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta = \pi$ සූත්‍රය ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

5. (අ) $f(z) = \frac{1}{[q(z)]^2}$ ශ්‍රිතය සලකන්න; මෙහි $q(z)$, z_0 දී විශ්ලේෂී වේ, $q(z_0) = 0$ වන අතර $q'(z_0) \neq 0$ වේ.

(i) $z = z_0$ යනු $f(z)$ ශ්‍රිතයෙහි ගණය දෙක වන ධ්‍රැවයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(z), f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^2[q(z)]^2}$ ආකාරයෙන් ලියා $f(z)$ හි අවශිෂ්ඨය $-\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}$ වන බව පෙන්වන්න.

එනයින් $f(z) = \frac{1}{(z+z^2)^2}$ ශ්‍රිතයෙහි $z = 0$ දී අවශිෂ්ඨය සොයන්න.

(ආ) පහත එකිනෙක ශ්‍රිතයන්හි අපූර්වතා ලක්ෂ්‍යය ධ්‍රැවයක් බව පෙන්වා එම ධ්‍රැවයෙහි ගණය සහ අදාල අවශිෂ්ඨය නිර්ණය කරන්න.

(i) $\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ (ii) $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

මතු සම්බන්ධයි...

6. (අ) Γ මත $f(z)$ සන්තතික වේ නම් සහ Γ වක්‍රය මත සියලු ලක්ෂ්‍ය සඳහා

$|f(z)| \leq M$ වන පරිදි $M \geq 0$ නියතයක් පවතී නම් , එවිට

$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leq ML$ වන බව සාධනය කරන්න; මෙහි L යනු Γ වක්‍රයෙහි දිග වේ.

එනයින් $\left|\int_C \frac{1}{z^2+1}dz\right| \leq \frac{\pi}{6}$ බව සාධනය කරන්න; මෙහි C යනු $|z| = 2$ වෘත්තයෙහි පළමු පාදකයෙහි වූ චාපය වේ.

(ආ) $\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$ අනුකලයෙහි අගය සොයන්න ; මෙහි C

(i) $|z-2| = 2$ (ii) $|z| = 4$.

වෘත්ත ලෙස ගෙන ඇත.

7. සුදුසු ඉරවලු සැලකීමෙන්

(i) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \frac{\pi}{18}$

බව පෙන්වන්න.

__________//__________