කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෘතීය පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2009 (පාඨමාලා ඒකක ක්‍රමය)
2013 ජූලි

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය - **PMAT E3033**

<u>ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.</u>

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 07 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 03 යි කාලය : පැය 02½ යි.

---

1. f යනු $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය මත සපර්යන්ත ශ්‍රිතයක් යයි ද,

$\sigma = \{a_0 \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n \equiv b\}$ යනු $[a,b]$ හි විභාගනයක් යයි ද ගනිමු.

σ ට අනුරූප f හි රීමාන් උඩත් වෙක්‍ය $U(f,\sigma)$ සහ රීමාන් යටත් වෙක්‍ය $L(f,\sigma)$ අර්ථ දක්වන්න.

(i) M සහ m යනු $f(x)$ හි $[a,b]$ තුල උඩත් හා යටත් පර්යන්ත නම් $m(b-a) \leq L(f,\sigma) \leq U(f,\sigma) \leq M(b-a)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $I = inf_\sigma U(f,\sigma)$ යයි ගනිමු. $\parallel \sigma \parallel \to 0$ විට, $U(f,\sigma) \to I$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\parallel \sigma \parallel$යනු σ හි ප්‍රතිමානය වේ.

(iii) $[a,b]$ මත සුදුසු විභාගනයක් සලකා $f(x) = e^x$ ශ්‍රිතය සඳහා $U(f,\sigma)$ සොයන්න.
$I = e^b - e^a$ බව පෙන්වන්න.

2. $[a,b]$ සංවෘත ප්‍රාන්තරය මත සපර්යන්ත ශ්‍රිතයක රීමාන් අනුකලය අර්ථ දක්වන්න.

(අ) $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිතය පහත පරිදි අර්ථ දක්වා ඇත.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \text{ පරිමේය විට} \\ 0, & x \text{ අපරිමේය විට} \end{cases}$$

$f(x)$ ශ්‍රිතය $[0,1]$ මත රීමාන් අනුකලය නොවන බව සාධනය කරන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

(ආ) f යන්න$[a,b]$ මත අනුකල්‍ය යයි ද

$\sigma = \{a_0 \equiv x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n \equiv b\}$ යයි ද $x_{r-1} \leq \xi_r \leq x_r$: $r = 0,1,\cdots,n$ යයි ද ගනිමු.

$\lim_{\|\sigma\|\to 0} \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) = \int_a^b f(x)dx$ බව සාධනය කරන්න. මෙහි $\|\sigma\|$ යනු σ හි ප්‍රතිමානය වේ.

සුදුසු ශ්‍රිතයක් සැලකීමෙන් $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \frac{n+3}{n^2+9} + \cdots + \frac{1}{n}\right\} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$ බව පෙන්වන්න.

3. (අ) (i) පළමු මධ්‍ය අගය ප්‍රමේයය සඳහන් කර, සාධනය කරන්න.

(ii) පළමු මධ්‍ය අගය ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $f(x)$ ශ්‍රිතය $[a,b]$ මත සන්තතික නම් $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ වන පරිදි $\xi \in (a,b)$ සංඛ්‍යාවක් පවතින බව පෙන්වන්න.

සුදුසු උදාහරණයක් භාවිත කරමින් ඉහත (ii) කොටසෙහි $f(x)$ සන්තතිකය යන උපකල්පනය ඉවත් කල නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(ආ) භාවිතා කරන සියළු ප්‍රතිඵල දක්වමින් දෙවන මධ්‍ය අගය ප්‍රමේය සාධනය කරන්න.

$\int_0^1 x^4(1-x)^2\,dx$ සඳහා දෙවන මධ්‍ය අගය ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කරන්න.

4. (අ) $\int_a^b f(x)dx$ විෂම අනුකලයක් යන්නෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි උදාහරණ

සහිතව දක්වන්න. අභිසාරිතාව සඳහා වූ අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන්, පහත දැක්වෙන විෂම අනුකල වල අභිසාරිතාව පරීක්ෂා කරන්න.

i) $\int_0^2 \frac{1}{(2x-x^2)}\,dx$

ii) $\int_0^{1/e} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

(ආ) භාවිතා කරන සියළු පරීක්ෂා සඳහන් කරමින්, පහත දැක්වෙන විෂම අනුකල වල අභිසාරිතාව සාකච්ජා කරන්න.

i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^r}\,dx$ ii) $\int_0^{\infty} \frac{x\,tan^{-1}x}{(1+x^4)^{1/3}}\,dx$

iii) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$

මතුසම්බන්ධයි...

5. (අ) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ යනු අභිසාරිතා අරය $R > 0$ වූ බල ශ්‍රේණියක් යයි ගනිමු.

(i) $0 < R_1 < R$ නම් බලශ්‍රේණිය $[-R_1, R_1]$ සන්තතික ශ්‍රිතයක් කරා ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වන බව ඔප්පු කරන්න.

(ii) එනයින් $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ යන්න $(-R, R)$ විවෘත ප්‍රාන්තරය තුල සන්තතික ශ්‍රිතයක් කරා අභිසාරී වන බව අපෝහනය කරන්න.

(ආ) (i) $(-1,1)$ මත, $tan^{-1}x$ සඳහා වූ බලශ්‍රේණි නිරූපනය සොයන්න.

(ii) $\frac{1}{2}(tan^{-1}x)^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{x^6}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \cdots$ බව පෙන්වන්න, මෙහි $-1 \le x \le 1$ වේ.

6. S කුලකයක් මත අර්ථ දක්වන ලද $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ශ්‍රිත අනුක්‍රමයක ඒකාකාරී අභිසාරිතාවය අර්ථ දක්වන්න. මෙහි $S \subseteq \mathbb{R}$ වේ.

(අ) S මත $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f(x)$ ට ලක්ෂීය වශයෙන් අභිසාරී වන්නේ යයි සහ $M_n = Sup_{x\epsilon S}|f_n(x) - f(x)|$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇතැයි ගනිමු. එවිට $n \to \infty$ විට $M_n \to 0$ නම් හා එනම් පමණක් $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f(x)$ට ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වන

බව සාධනය කරන්න.

$k > 0$ වන, $[0, k]$, මත $\{nxe^{-nx^2}\}$ අනුක්‍රමය, ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී නොවන බව පෙන්වන්න.

(ආ) සියළු $n\epsilon\mathbb{N}$ සඳහා, $f_n: S \to \mathbb{R}$ යනු සන්තතික ශ්‍රිත යයි ගනිමු. $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f(x)$ ට ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වන්නේ නම් f සන්තතික බව ඔප්පු කරන්න.

7. S කුලකය මත අර්ථ දැක්වුන $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ශ්‍රේණියක ඒකාකාරී අභිසාරිතාවය අර්ථ දක්වන්න. මෙහි $S \subseteq \mathbb{R}$ වේ.

$\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ධන සංඛ්‍යා සහිත අනුක්‍රමයක් ඇතැයි සිතමු. සියළු $x \in S$ සහ සියළු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $|f_n(x)| \le M_n$ වන පරිදි $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ අභිසාරී වන විට, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, S මත ඒකාකාරී ලෙස නිරපේක්ෂ ලෙස අභිසාරී වන බව සාධනය කරන්න.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ ශ්‍රේණිය $0 < a < 1$ වූ $[a, 1]$ මත ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වන නමුත් $[0,1]$ මත එසේ නොවන බව පෙන්වන්න.

____________//____________