කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2016 (නව නිර්දේශය)

2022 පෙබරවාරි

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

PMAT E 3063 - ප්‍රස්තාර වාදය සහ අමූර්ත වීජය

ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 07 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 05. කාලය : පැය 2 1/2 යි.

---

1. (a) $G = (V, E)$ ප්‍රස්ථාරයක් සහ $v_0, v_n \in V$ ලෙස ගනිමු. පහත ප්‍රකාශන වලින් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

(i) w යනු v_0 සිට v_n දක්වා ඇති මාර්ගයකි

(ii) p යනු v_0 සිට v_n දක්වා ඇති පෙතකි

(iii) c යනු v_0 සිට v_n දක්වා ඇති චක්‍රයකි

(b) පහත දැක්වෙන අනුයාත න්‍යාසය දී ඇති විට අනුරූප ප්‍රස්ථාරය ඇඳ දක්වන්න.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a ශීර්ෂයේ සිට d දක්වා වූ දිග 3 වන එකිනෙකට ස්වායත්ත මාර්ග ගණන සොයන්න.

(c) දී ඇති ලක්ෂණ සහිත ප්‍රස්ථාරය අඳින්න. එසේ නැත්නම් ප්‍රස්ථාරය නොපවතින්නේ මන්දැයි පැහැදිලි කරන්න.

(i) මාත්‍ර අගයන් 2,3,3,4,4, වූ ශීර්ෂ 5 ක් සහිත සරල ප්‍රස්ථාරයක්

(ii) මාත්‍ර අගයන් 2,2,4,4,4 වූ ශීර්ෂ 5 ක් සහිත සරල ප්‍රස්ථාරයක්

(d) පහත දැක්වෙන එක් එක් ප්‍රස්ථාරය සඳහා

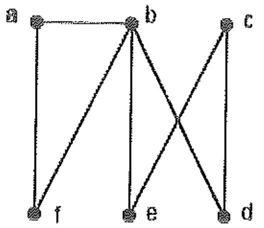
(i) ඔයිලර් චක්‍රයක්

(ii) හැමිල්ටෝනියානු චක්‍රයක්

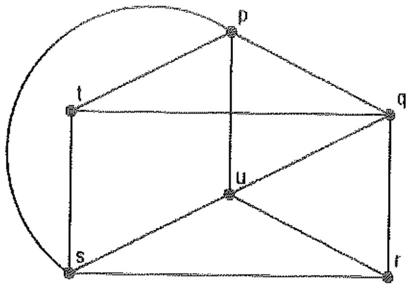
පවතී දැයි නිර්ණය කරන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

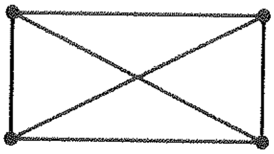
G_1:



G_2:

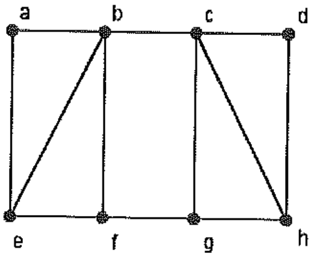


2. (a) $G = (V, E)$ ප්‍රස්ථාරයෙහි උපප්‍රස්ථාරයක් $G' = (V', E')$ අර්ථ දක්වන්න.
පහත ප්‍රස්ථාරය සදහා අඩුම තරමින් දාර තුනක් සහිත සම්බන්ධිත (connected) සමරූපී නොවන (non-isomorphic) උපප්‍රස්ථාර සියල්ල අදින්න

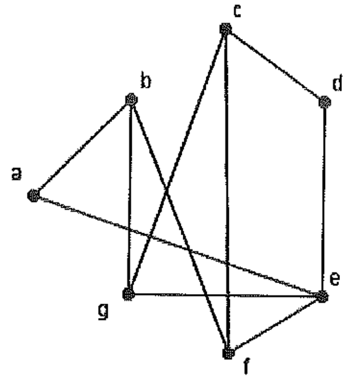


(b) $G = (V, E)$ වූ ද්විශාඛ ප්‍රස්ථාරය අර්ථ දක්වන්න.
පහත දැක්වෙන ප්‍රස්ථාර ද්විශාඛ වේ දැයි නිර්ණය කරන්න. ප්‍රස්ථාර ද්විශාඛ වේ නම් වියුක්ත ශීර්ෂ කුලක වෙන් කර දක්වන්න. එසේ නොවේ නම් හේතු දක්වන්න.

G_1:



G_2:



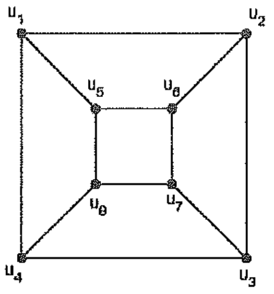
(c) n ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් විට ශීර්ෂ n ගණනක් අඩංගු සම්පූර්ණ ද්විශාඛ ප්‍රස්ථාරයක (complete bipartite graph) උපරිම දාර සංඛ්‍යාව $\frac{n^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(d) G හා H යන ප්‍රස්ථාරය දෙක සමරූපී වේ යැයි කීමෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

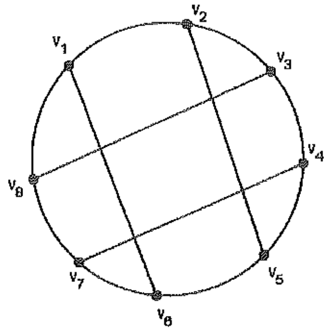
මතු සම්බන්ධයි…

පහත දැක්වෙන එක් එක් ප්‍රස්ථාර යුගලය සමරූපී දැයි නිර්ණය කරන්න. ඒවා සමරූපී නම් සමරූපතා ශ්‍රිතයක් ලියා දක්වන්න. ඒවා සමරූපී නොවේ නම් එක් ප්‍රස්ථාරයක් සතු වන නමුත් අනෙක් ප්‍රස්ථාරය සතු නොවන අචලක ගුණයක් සොයන්න.

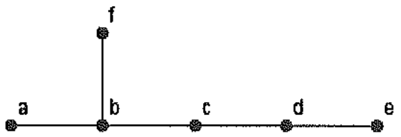
G_1:



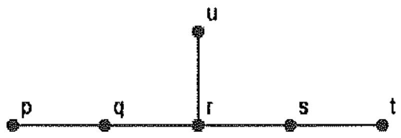
G_2:



H_1:



H_2:

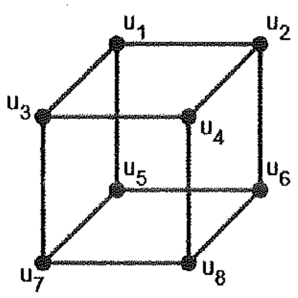


3. (a) (i) තලීය ප්‍රස්ථාරයක් යන්නෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්ද?

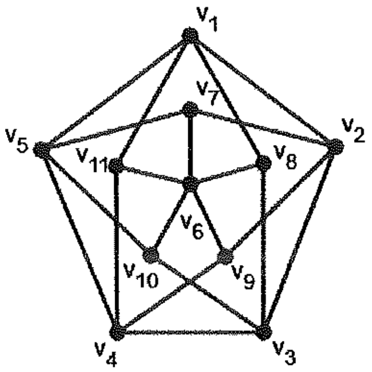
(ii) කුරටොස්කි ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

(iii) පහත ප්‍රස්ථාර වල තලීයතාවය නිර්ණය කරන්න.

G:



H:



මතු සම්බන්ධයි...

(b) $(G,*)$ යනු සමූහයක් යැයි ගනිමු.

(i) G හි ඒකක අවයවය

(ii) $x \in G$ හි ප්‍රතිලෝමය

අනන්‍ය බව පෙන්වන්න.

4. (a) $G = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ යනු 1 ට වැඩි සියලු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය යැයි ගනිමු. සියලු $x, y \in G$ සඳහා $x * y = xy - x - y + 2$ ලෙස අර්ථ දක්වමු.

(i) $*$ යනු G මත ද්වීමය කර්මයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) $(G, *)$ යනු සමූහයක් බව සාධනය කරන්න.

(iii) $(G, *)$ ආබෙලියානු සමූහයක් වේද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(iv) G තුල ගණය 3 වන අවයවයක් පවතීද? හේතු දක්වන්න.

(b) සියලු තාත්ත්වික කුලකය $\mathbb{R}$, ඒ මත අර්ථ දැක්වූ ගුණිතය $(\times)$ ගණිත කර්මය යටතේ සමූහයක් වේද? හේතු දක්වන්න.

5. (a) (i) G සමූහයක H නොහිස් උපකුලකයක් G හි උපසමූහයක් වන්නේ සියලු $a, b \in H$ සඳහා $ab^{-1} \in H$ නම් හා එනම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

(ii) G යනු සමූහයක් යැයි ද a යනු G හි අභිමත අචල අවයවයක් යැයි ද ගනිමු. $H = \{x \in G \,|xa^2 = a^2x\}$ යනු G හි උපසමූහයක් බව පෙන්වන්න.

(b) (i) සමූහයන් සඳහා වූ ලග්රාන්ජ් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) G හි ඕනෑම x අවයවයක් සඳහා x හි ගණය මගින් G හි ගණය බෙදෙන බව අපෝහනය කරන්න.

(iii) G යනු ගණය 27 වූ සමූහයක් යැයි ගනිමු. G හි ගණය 3 වන උපසමූහයක් පවතින බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

6. (a) (i) ප්‍රමත උපසමූහයක් අර්ථ දක්වන්න

(ii) H හා K යනු G හි ප්‍රමත උපසමූහ නම් $H \cap K$ ද ප්‍රමත උපසමූහයක් බව පෙන්වන්න

(iii) H යනු G හි උපසමූහයක් හා සියලු $g \in G$ හා $h \in H$ සඳහා $ghg^{-1} \in H$ නම් H යනු G හි ප්‍රමත උපසමූහයක් වන බව පෙන්වන්න.

(b) $(G, *)$ සහ $(H, \circ)$ යනු සමූහ දෙකක් යැයි ද e යනු G හි ඒකක අවයවය යැයි ද ගනිමු. $\phi: G \to H$ අනුරූපතාව සරූපතාවක් යැයි කීමෙන් අදහස් වන්නේ කුමක් දැයි අර්ථ දක්වන්න.

ϕ හි මදය, $ker(\phi)$, අර්ථ දක්වන්න.

(i) $ker(\phi) = \{e\}$ නම් හා එනම් පමණක් ϕ සරූපතාව එකට-එක වූ අනුරූපතාවක් බව සාධනය කරන්න.
$G = (\mathbb{R}^+, \times)$ හා $H = (\mathbb{R}, +)$ සමූහ දෙකක් යැයි ගනිමු , මෙහි $\mathbb{R}^+$ යනු ධන තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය වේ. $\varphi(x) = \log x$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇති $\varphi: G \to H$ ශ්‍රිතය සලකන්න.

(α) φ සමූහ සරූපතාවක් බව සාධනය කරන්න.

(β) $Ker\ \varphi$ සොයන්න.

(γ) φ එකට එක වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න

7. (a) $a, b \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\oplus$ හා $\otimes$ ද්විමය කාරක $a \oplus b = a + b + 1$ සහ $a \otimes b = a + b + ab$ ලෙස අර්ථ දක්වමු.

(i) $\mathbb{Z}$ යන්න $\oplus$ සහ $\otimes$ අනුබද්ධයෙන් න්‍යාදේශ්‍ය වලයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) එම වලයෙහි ශුන්‍ය අවයවය කුමක්ද?

(iii) එම වලයට ඒකක අවයවයක් තිබේද?

(b) R වලයක I පරමාදර්ශයක් අර්ථ දක්වන්න
$I = \{3a + 3b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ සහ $S = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ලෙස ගනිමු.

(i) $\mathbb{R}$ හි සුපුරුදු ආකලනය හා ගුණිතය යටතේ I යන්න S හි උප වලයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) I යන්න S හි පරමාදර්ශයක් වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

***************//***************