



කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

පුරුකිරි සහ අධ්‍යාපන අධ්‍යයන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2016 (නව නිර්දේශය)

2022 පෙබරවාරි

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

PMAT E 3043 - සංකීර්ණ විචල්‍යය

ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 07 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 04 යි.

කාලය : පැය 2 1/2 යි.

01. (අ) $\operatorname{Re}(z^2) + i \operatorname{Im}(\bar{z}(1 + 2i)) = -3$ තෘප්ත කරන සියලුම z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.
- (ආ) z යනු $-1 + 3i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව යයි ගනිමු. $z^2 + pz$ තාත්වික වන පරිදි p තාත්වික සංඛ්‍යාව නිර්ණය කරන්න.
- (ඇ) $\frac{2z+1}{iz+1}$ හි අතාත්වික කොටස -2 වේ නම්, ආගන්ධ තලයෙහි z නිරූපණය කරන ලක්ෂයෙහි පථය සරල රේඛාවක් බව පෙන්වන්න.
- (ඈ) $(1 - 2i)^4$ ගණනය කර පිළිතුර ධ්‍රැවීය ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න.
02. (අ) $f(z) = \frac{z}{z}$ සඳහා $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z}$ නොපවතින බව පෙන්වන්න.
- (ආ) $z = z_0$ දී $f(z)$ සන්තතික වේ යයි ගනිමු. $|f(z)|$ ද $z = z_0$ දී සන්තතික වන බව සාධනය කරන්න.
- (ඇ) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{z^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ යයි ගනිමු.
- (i) \mathbb{C} හි සෑම තැනකදීම $f(z)$ සන්තතික වන බව සහ
- (ii) $z = 0$ දී $f'(z)$ නොපවතින බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

(ආ) $f(z) = \frac{z+1}{2z+1}$, $z \neq -\frac{1}{2}$ විට $f'(z)$ සොයන්න.

03. (අ) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ශ්‍රිතය D වසමෙහිදී විශ්ලේෂී වේ නම් D හි ඕනෑම z ලක්ෂ්‍යයකදී $f(z)$ හි $f'(z)$ ව්‍යුත්පන්නය $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

එනමින් f ශ්‍රිතය සඳහා D දී කෝෂී-රිමාන් සමීකරණ ලබා ගන්න.

තවදුරටත් u සහ v සඳහා සන්තතික දෙවන ගණයේ ආංශික අවකල D දී පවතී නම්, ඒවා D දී අනුවර්තී වන බව පෙන්වන්න.

(ආ) (i) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ අනුවර්තී වන බව සාධනය කරන්න.

(ii) $f(z) = u + iv$ විශ්ලේෂී වන පරිදි v සොයන්න.

(iii) z මගින් $f(z)$ ප්‍රකාශ කරන්න.

04. (අ) (i) $z = 0$ සිට $z = 1 + i$ දක්වා සරල රේඛාව

(ii) $z = 0$ සිට $z = 1$ දක්වා තාත්වික රේඛාව ඔස්සේ සහ $z = 1$ සිට $z = 1 + i$ දක්වා අතාත්වික අක්ෂයට සමාන්තර රේඛාවක් ඔස්සේ

$\int_0^{1+i} (x - y + ix^2) dz$ රේඛා අනුකලය අගයන්න.

(ආ) C සඳහා $\int_C f(z) dz$ අනුකලය අගයන්න, මෙහි $f(z) = \frac{z^2-1}{z}$ වන අතර C වක්‍රය

(i) $z = 2e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi)$ අර්ධ වෘත්තය

(ii) $z = 2e^{i\theta} (\pi \leq \theta \leq 2\pi)$ අර්ධ වෘත්තය

(iii) $z = 2e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ වෘත්තය

මගින් ලබා දේ.

05. (අ) කලීය ශ්‍රිත් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$\oint_C (2x - y^2) dx - xy dy$ හි අගය සෙවීමට කලීය ශ්‍රිත් ප්‍රමේයය යොදා ගන්න,
 C යනු $x^2 + y^2 = 1$ සහ $x^2 + y^2 = 9$ වෘත්ත මගින් පිරිවැසුන පෙදෙසෙහි මායිම වේ.
 මතු සම්බන්ධයි...

(ආ) කෝෂිගේ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$\int_C \frac{dz}{z^2(z-2)(z-4)}$ අගයන්න, මෙහි $(-1, -1), (3, -1), (3, 1)$ සහ $(-1, 1)$ යා කරන සෘජුකෝණාස්‍රය වේ.

[ඉභීය: ඔබට $\oint (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$ ප්‍රතිඵලය භාවිතා කළ හැක.]

(ඇ) කෝෂිගේ අනුකල සූත්‍රය ලියා දක්වන්න.

(i) $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z-\frac{\pi}{6})^3} dz, C: |z| = 1$

(ii) $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1} dz, C: |z-1| = 1$

අනුකල අගයන්න.

06. (අ) පහත ඒකලින අපූර්වතා අර්ථ දක්වන්න:

- (i) ගණය n වූ ධ්‍රැවයක්
- (ii) ඉවත් කළ හැකි අපූර්වතාවය
- (iii) අත්‍යාවශ්‍ය අපූර්වතාවය

(ආ) පහත ශ්‍රිතයන්හි ඒකලින අපූර්වතා නිර්ණය කර ඒවා වර්ගීකරණය කරන්න:

(i) $\frac{e^{2z}-1}{z}$ (ii) $e^{1/z}$ (iii) $\frac{z}{(z^2-\frac{\pi^2}{4})}$

(ඇ) $f(z) = \frac{z+4}{z^2(z^2+3z+2)}$ ශ්‍රිතය සඳහා

- (i) $0 < |z| < 1$
- (ii) $1 < |z| < 2$
- (iii) $|z| > 2$

ප්‍රදේශයන් සඳහා වලංගු වන ලෝරන්ට්ස්ගේ ප්‍රසාරණය සොයන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

07. අවශිෂ්ට ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

සුදුසු අනුකල සැලකීමෙන්,

$$(i) \int_0^{2\pi} \frac{4 d\theta}{4-4 \cos \theta+1} = \frac{8\pi}{3}$$

$$(ii) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

බව පෙන්වන්න.
