කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2016

2022 පෙබරවාරි

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

PMAT E 3033 - ශ්‍රිත අනුක්‍රම සහ රීමාන් අනුකලවාදය

ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 07 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 03. කාලය : පැය 2 1/2 යි.

---

1. (a) $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය තුල $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ සපරියන්ත ශ්‍රිතය රීමාන් අනුකල්‍ය වන්නේ යයි කීමෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්ද ?

   (b) $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය තුල $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ සපරියන්ත ශ්‍රිතය ඩාබොක්ස් අනුකල්‍ය වන්නේ නම් එය රීමාන් අනුකල්‍ය බවද පෙන්වන්න.

   (c) $[0,1]$ ප්‍රාන්තරයෙහි $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ ඒකාකාර විභාගනයට සාපේක්ෂව $f(x) = x^2$ හි රීමාන් ඓක්‍යය $S(f, P_n)$ ගණනය කරන්න. $\lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$ සැලකීමෙන් f රීමාන් අනුකල්‍ය බව පෙන්වන්න.

2. $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ සපරියන්ත ශ්‍රිතයක් යයි ද $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k, \cdots, x_n = b\}$ යනු $[a,b]$ හි $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ වන ඒකාකාර විභාගනයක් යයිද ගනිමු.

   (i) සුපුරුදු අංකනයෙන්, $U(f,P)$, $L(f,P)$, $U(f)$ සහ $L(f)$ අර්ථ දක්වන්න.

සම්බන්ධිතයි

(ii) $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය මත f ශ්‍රිතය රීමාන් අනුකල්‍ය වීමට ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතාවය වන පහත දැක්වෙන කෝෂී උපමානය;

" *එක් එක්* $\varepsilon > 0$ *සඳහා* $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \varepsilon$ *වන පරිදි* $[a,b]$ *හි* P_n *විභාගනයක් පවතී නම්* $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය මත f ශ්‍රිතය රීමාන් අනුකල්‍ය වේ"

සාධනය කරන්න.

(iii) $a = 0, b = 1, P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ සහ $f(x) = 1 - x^2$ යයි ගනිමු.

$\lim_{n\to\infty}\left(U(f,P_n) - L(f,P_n)\right)$ සොයා $[0,1]$ ප්‍රාන්තරය මත f ශ්‍රිතය රීමාන් අනුකල්‍ය බව පෙන්වන්න.

$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ සහ $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ භාවිතා කරන්න.

3. (a) $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය තුල සියලු සන්තතික ශ්‍රිත රීමාන් අනුකල්‍ය බව පෙන්වන්න.

(b) f රීමාන් අනුකල්‍ය නම් $|f|$ ද රීමාන් අනුකල්‍ය බව පෙන්වන්න .

(c) f සහ g යනු $\int_a^b f = \int_a^b g$ වන පරිදි වූ සන්තතික ශ්‍රිත දෙකක් යයි ගනිමු. $f(c) = g(c)$ වන පරිදි $c \in (a,b)$ පවතින බව පෙන්වන්න.

4. $\int_a^{\infty} f(x)dx$ සහ $\int_a^b g(x)dx$ පළමු සහ දෙවන වර්ගයේ අනිශ්චිත අනුකල වල අභිසාරීතාව අර්ථ දක්වන්න; මෙහි $g(x)$ යනු $x = a$ හිදී සපර්යන්ත නොවන ශ්‍රිතයකි. පහත අනිශ්චිත අනුකල අගයන්න.

(i) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ (ii) $\int_1^{2} \frac{3}{x^2(x-2)} dx$ (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ (iv) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$

සම්බන්ධිතයි

5. $f_n: A \to R$ ශ්‍රිත අනුක්‍රමයක් නම් $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරීවීම සඳහා වන වයිස්ට්‍රාස් M පරීක්ෂාව ප්‍රකාශකර සාධනය කරන්න.

පහත ශ්‍රිත ශ්‍රේණිවල අභිසාරීතාව සාකච්ඡා කරන්න.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ 6n (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos(4^n x)$

6. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ යනු සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $a_n \neq 0$ වන ලෙස වූ බල ශ්‍රේණියක් යයි ද $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ පවතී යයි ද ගනිමු.

ඉහත බල ශ්‍රේණිය

(i) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා අභිසාරී වන

(ii) $x = 0$ සඳහා පමණක් අභිසාරී වන

ρ හි අගයන් සොයන්න.

(iii) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා අභිසාරී වන කේන්ද්‍රය මූලය වන සපර්යන්තගත ප්‍රාන්තරයක් ද සොයන්න.

(b) පහත බල ශ්‍රේණි වල අභිසාරිතා අරයයන් සහ අභිසාරිතා ප්‍රාන්තර නිර්ණය කරන්න.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 3^n}$

$\frac{1}{1+x}$

7. $|x| < 1$ සඳහා $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ බව පෙන්වා $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ නිමානය කරන්න.