කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දූරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෘතීය පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2009 (පාඨමාලා ඒකක ක්‍රමය)
2013 ජූලි

විද්‍යා පීඨය

ව්‍යවහාරික ගණිතය - AMAT E3043

<u>ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.</u>

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 07 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 04 යි කාලය : පැය 02½ යි.

---

1. පරිපූර්ණ තරලයකචලිතය සඳහා, සුපුරුදු අංකනයෙන්, සාන්තතයේ සමීකරණය
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho\, \underline{q}\right) = 0$ ආකාරයෙන් ලබා ගන්න.තරලය අසම්පීඩ්‍ය නම් $div\,\underline{q} = 0$ බව පෙන්වන්න.

චලනයවන තරලයක ප්‍රවේග දෛශිකය වන $\underline{q}$,$\underline{q} = q_x \underline{i} + q_y \underline{j} + q_z \underline{k}$ යන්නෙන්දෙනු ලබයි; මෙහි

$$q_x = c_1 x + b_1 y + c_1 z$$
$$q_y = b_1 x - (c_1 + c_3) y + c_2 z$$
$$q_z = c_1 x + c_2 y + c_3 z \text{ වේ.}$$

b_1, c_1, c_2, c_3 නියත නම් තරලය අසම්පීඩ්‍ය හා චලිතය නිර්භ්‍රමණ බව පෙන්වන්න.

$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = c_1 x + b_1 y + c_1 z$ යොදා ගනිමින 'ප්‍රවේග විභවය වන $\phi(x, y, z)$,

$-\phi = c_1 \frac{x^2}{2} + b_1 xy + c_1 zx + g(y, z)$ ආකාරයෙන් ලබා ගන්න.

$\frac{\partial g}{\partial y} = c_2 z - (c_1 + c_3) y, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = c_2 y + c_3 z$ බව පෙන්වන්න.

මතුසම්බන්ධයි....

එනයින්, ϕ ප්‍රවේග විභවය $\phi = -\left(c_1 \dfrac{x^2}{2} + b_1 xy + c_1 zx\right) - c_2 yz - c_3 \dfrac{z^2}{2} + (c_1 + c_3)\dfrac{y^2}{2} + C$

ආකාරයෙන් ලබා ගැනීමට $g(y,z) = c_2 yz + c_3 \dfrac{z^2}{2} - (c_1 + c_3)\dfrac{y^2}{2}$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

2. පරිපූර්ණ අසම්පීඩ්‍ය සමජාතීය තරලයක් සංස්ථිතික බල යටතේ සතත චලිතයේ යෙදේ.සුපුරුදු අංකනයෙන් ඔයිලර් චලිත සමීකරණය $\nabla \Omega - \dfrac{1}{\rho}\underline{\nabla} p = \dfrac{D\underline{q}}{Dt}$ සහ $(\underline{q}\cdot\underline{\nabla})\underline{q} = \underline{\nabla}\dfrac{a^2}{2} - \underline{q}\times(\underline{\nabla}\times\underline{q})$ ලෙස උපකල්පනයෙන කොට $\underline{\nabla}\times(\underline{a}\times\underline{\nabla}\times\underline{q}) = \underline{0}$ බව පෙන්වන්න.

$OX, \quad OY, \quad OZ$ ට සමාන්තර $\underline{q}$ හි සංරචක පිළිවෙලින් $Ay + \dfrac{\partial\phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\phi}{\partial y}, \dfrac{\partial\phi}{\partial z}$ නම් $\phi = Cz + h(x,y)$ ආකාරයෙන් ϕ ප්‍රකාශ කල හැකිබව පෙන්වන්න; මෙහි A, C නියතද ϕ යනු x, y, z හි ශ්‍රිතයක් ද වන අතර $h(x,y)$ යන්න $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරයි.

3. ත්‍රිමාන ප්‍රභවයක්, $4\pi r^2 q_r = 4\pi m$ යන්නෙන් අර්ථ දැක්වේ; මෙහි q_r අරීය ප්‍රවේගය වන අතර m ප්‍රභවයේ ප්‍රබලතාවය වේ. x–අක්ෂයේ ධන දිශාවට u *ඒකාකාර* ප්‍රවේගයෙන් ගලන ප්‍රවාහයක O මූලයේ ප්‍රබලතාවය m වන සරල ත්‍රිමාන ප්‍රභවයක් අචලව සවිකර ඇත.ඕනෑම P ලක්ෂ්‍යයක ප්‍රවේග විභවය $\dfrac{m}{r} - ur\cos\theta$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $r = OP$ සහ θ යනු Ox හා OP අතර කෝණය වේ.

XOP තලයේ P හි දී OP ඔස්සේ සහ OP ට ලම්බක ප්‍රවේග සංරචක පිළිවෙලින් $\dfrac{m}{r^2} + u\cos\theta, \quad -u\sin\theta$ බව අපෝහනය කරන්න. ඒ නයින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ අනාකුල රේඛා $r\dfrac{dr}{d\theta} + r^2\cot\theta = -\dfrac{m}{u\sin\theta}$ අවකල සමීකරණයෙන් දෙනු ලබන බවත් අනාකුල රේඛා $ur^2\sin^2\theta - 2m\cos\theta =$ නියතයක් මගින් දෙනු ලබන බවත් පෙන්වන්න.

මතුසම්බන්ධයි....

4. පරිපූර්ණ තරලයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් ඔයිලර් චලිත සමීකරණය වන $\frac{D\underline{q}}{Dt} = \underline{F} - \frac{1}{\rho}\underline{\nabla}\, p$ ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

තරලය අසම්පීඩ්‍ය හා බාහිර බලය වන $\underline{F}$ සංස්ථිතික නම්

$\frac{\partial \underline{q}}{\partial t} + \nabla \frac{q^2}{2} - \underline{q} \times \underline{\xi} = -\underline{\nabla}\Omega - \frac{1}{\rho}\underline{\nabla}\, p$ බවපෙන්වන්න. පමහි $\underline{F} = -\underline{\nabla}\,\Omega$ හා

$\xi = curl\, \underline{q}$ වේ.තරල චලිතය සතත නම් හා $p = k\rho^{\gamma}$ නම් $\frac{1}{2}q^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \Omega$ යන්න අනාකුල රේඛාවක් දිගේ (H) නියත අගයක් ගන්නා බව පෙන්වන්න; මෙහි k හා γ නියත වන අතර $\gamma > 1$ වේ. කුමන තත්වයටතේ H නියතයෙහි අගය සියළුම අනාකුල රේඛා සඳහා සමානවේ ද?

5. ඒකාකාර u ප්‍රවේගයෙන් ගලන අනන්ත ප්‍රවාහයක අරය a වන ඝන ගෝලයක් අචලව සවිකර ඇත. තරලය අසම්පීඩ්‍ය ද එහි චලිතය අක්ෂීය ලෙස සමමිතික ද, නිර්භ්‍රමණ ද වේනම්, $\phi\ (r,\ \theta)$ ප්‍රවේග විභවය,සුදුසු ලෙස තෝරා ගන්නා ලද ධ්‍රැවක බන්ඩාංක අක්ෂ පද්ධතියක ඇසුරෙන් $\phi\ (r, \theta) = u\cos\theta\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right)$ ආකාරයෙන් ලබා ගන්න.

$\nabla^2\phi = 0$ ලප්ලාස් සමීකරණයේ විසඳුම $\phi\ (r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}}\right) P_{\ell}(\cos\theta)$ ආකාරයෙන් උපකල්පනය කල හැක.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\frac{p}{\rho} = C - \frac{1}{2}q^2$ බර්නුලි සමීකරණය උපකල්පනයෙන් ගෝලය මත සම්ප්‍රයුක්ත තෙරපුම ශුන්‍යයබවපෙන්වන්න.

ඒ නයින්, තරලයේ ඝනත්වය ρ ද එහිස්කන්ධය M ද ගුරුත්වජ ත්වරණය g ද නම් ගෝලය අචලව නිදහසේ තැබීම සඳහා අවශ්‍ය බාහිර බලය සොයන්න.

මතුසම්බන්ධයි....

6. ඝන වස්තුවක පිටත සරල සම්බන්ධිත අවකාශය තුල නිර්භ්‍රමණව චලිත වන අසම්පීඩ්‍ය තරලයක චාලක ශක්තිය $-\frac{1}{2}\rho\int_S \phi \frac{\partial\phi}{\partial n}\, ds$ බව පෙන්වන්න. මෙහි ϕ ප්‍රවේග විභවය අනන්තයේදී $O\left(\frac{1}{r}\right)$ ද, අනුකලය S පෘෂ්ඨයපිරිවසා ද වන අතර $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ අවකලන තරලය තුලට ඇදින ලද අභිලම්බය ඔස්සේ ද වේ.

අනන්තයේදී නිසල අසම්පීඩ්‍ය තරලයක් තුල ඝන ගෝලයක් සිරස්ව ඉහළට නගී.ගෝලයේ ස්කන්ධය නොගිනිය හැකිවේ. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය $\frac{dT}{dt} = \underline{F}\cdot\underline{u}$ ආකාරයෙන් යොදා ගනිමින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් ගෝලයේ ත්වරණය $2g$ බව පෙන්වන්න; මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයවේ.

තරල චලිතය සඳහා ප්‍රවේග විභවය සුපුරුදු අංකනයෙන් $\phi = \frac{u a^3 \cos\theta}{2r^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව උපකල්පනය කල හැක.

7. අභිමත හරස්කඩක් ඇති සිලින්ඩරයක් පසුකර ගලන තරලයක් සඳහා සංකීර්ණ විභවය $w(z)$ නම් සිලින්ඩරයේ ඒකක දිගක් මත සම්ප්‍රයුක්ත බලය වන (X, Y), $X - iY = \frac{1}{2} i\rho \int_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$ යන්නේ දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි අනුකලය සිලින්ඩරයේ C ඉරවලුව වටා වන අතර ρ යනු තරලයේ ඝනත්වය වේ.

අසම්පීඩ්‍ය තරලයක ද්විමාන නිර්භ්‍රමණ චලිතයේ යෙදෙන අරය a වන වෘත්තාකාර $|z| = a$ සිලින්ඩරයක පිටත $z = f$ හි වන ප්‍රබලතාවය m වන P නම් වන ද්විමාන ප්‍රභවයක් නිසා සිදුවේ; මෙහි $op = f > a$ වන අතර O යනු සිලින්ඩරයේ කේන්ද්‍රය වේ. තරල චලිතය සඳහා සුදුසු ප්‍රතිබිම්බ පද්ධතියක් ලියාදක්වා $\left(\frac{dw}{dz}\right)^2$ ට $z = 0,\ z = f\ , z = \frac{a^2}{f}$. ලක්ෂයයන්හිදී සරල ධ්‍රැවයන් පවතින බව සත්‍යාපනය කරන්න. ඒනයින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් සිලින්ඩරය මත ඒකක දිගක සම්ප්‍රයුක්ත බලය සොයන්න.

---------------//---------------