කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය, ශ්‍රී ලංකාව

දූරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී(සාමාන්‍ය) උපාධි දෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2016

2024 අගෝස්තු

ව්‍යවහාරික ගණිතය

AMAT E 3033 - අගණන ගණිතය

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව: හයයි (06) පිටු සංඛ්‍යාව: තුනයි (03) කාලය: පැය දෙකහමාරයි ($2\frac{1}{2}$)

ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

Q1. (a) i. $\overline{\mathrm{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ යනු $\mathbb{R}^n$ මත වූ ඕනෑම දෛශිකයකි. සුපුරුදු අංකනයෙන් L^1 සහ L^∞ ප්‍රතිමානයන් අර්ථ දක්වන්න.

ii. ප්‍රතිමානයක් වීම සඳහා සැපිරිය යුතු තත්ත්වයන් මොනවාද?

iii. පහත සඳහන් ශ්‍රිතය $\mathbb{R}^n$ මත ප්‍රතිමානයක් බව පෙන්වන්න.

$$||\overline{\mathrm{x}}|| = \max_{\mathrm{n}=1,2,...,\mathrm{k}} |\mathrm{x_n}|$$

(b) i. A යනු තාත්ත්වික න්‍යාසයකි. සුපුරුදු අංකනයෙන් (Forbenius matrix norm) $||A||_F$ සහ $||A||_2$ යන ප්‍රතිමානයන් අර්ථ දක්වන්න.

ii. පහත න්‍යාසයේ $||A||_F$ අගය සොයන්න.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Q2. (a) i. දෝෂ තත්ත්වයක්(ill condition) සහිත සමීකරණ පද්ධතියක් අර්ථ දක්වන්නේ කෙසේද?

ii. පහත දී ඇති ඒකජ සමීකරණ පද්ධතියේ තත්ත්ව අගය ගණනය කරන්න. එමගින් එම පද්ධතියේ තත්ත්වය ප්‍රකාශ කරන්න. ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කිරීමට හේතු දක්වන්න.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(b) i. සුපුරුදු අංකනයෙන් පහත න්‍යාසයේ LU විසංයෝජනය සොයන්න.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ii. ඉහත LU විසංයෝජනය භාවිතයෙන් $A\overline{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ යන පද්ධතියේ විසඳුම් සොයන්න.

මතුසම්බන්ධයි ...

Q3. (a) A සමචතුරස්‍ර න්‍යාසය නිතිමතින් විකර්ණාභි ප්‍රමුක න්‍යාසයක් යැයි කීමෙන් අදහස් කරන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

(b) A යනු නිතිමතින් විකර්ණාභි ප්‍රමුක න්‍යාසයක් විටදී ජැකෝබි පුනඃකරණ ක්‍රමය $A\overline{x} = \overline{b}$ හි විසඳුමට සැමවිටම අභිසාරී වනබව පෙන්වන්න.

(c) පහත දැක්වෙන ඒකජ සමීකරණ පද්ධතිය සලකන්න.

$$
\begin{aligned}
4x - y - z &= 3 \\
-2x + 6y + z &= 9 \\
-x + y + 7z &= -6
\end{aligned}
$$

මෙහි ආරම්භක අගය $(1, 1, 1)$ ලෙස සලකන්න. ජැකෝබි පුනඃකරණ ක්‍රමය භාවිතයෙන් පද්ධතියේ විසඳුම් සොයන්න. (පුනඃකරණ 2 ක් දක්වා පිළිතුරු ගණනය කරන්න.)

Q4. (a) සුපුරුදු අංකනයන් භාවිතයෙන් SOR පුනඃකරණ ක්‍රමයේ සූත්‍රය ලියා දක්වන්න.

(b) SOR සහ SUR පුනඃකරණ ක්‍රම අතර වෙනස පැහැදිලි කරන්න.

(c) පහත දැක්වෙන ඒකජ සමීකරණ පද්ධතිය SOR පුනඃකරණ ක්‍රමය භාවිතා කර විසඳුම් ලබගන්න. මෙහි weighted value සඳහා සුදුසු අගයක් භාවිතා කරමින් දෙවන පුනඃකරණය තෙක් පිළිතුරු ගණනය කරන්න.

$$
\begin{aligned}
2x + 4z &= 2 \\
x + 4y - 2z &= 4 \\
4x - y + z &= -8
\end{aligned}
$$

මෙහි ආරම්භක අගය $(0, 0, 0)$ ලෙස සලකන්න.

Q5. (a) ප්‍රේක්ෂාවලී අරය $\rho(T) < 1$ නම් $(1 - T)^{-1}$ පවතින බවත්, එය

$$(1 - T)^{-1} = 1 + T + T^2 + ... = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$$

වන බවත් පෙන්වන්න.

(b) $||\overline{X} - \overline{X}^k|| \leq ||T||^k ||\overline{X} - \overline{X}^0||$ සහ $||\overline{X} - \overline{X}^k|| \leq \dfrac{||T||^k}{1 - ||T||} ||\overline{X}^1 - \overline{X}^0||$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි T යනු $||T|| < 1$ වන පරිදි වූ $n \times n$ වන න්‍යාසයක්ද, $\overline{X}^k = T\overline{X}^{k-1} + \overline{c}$ ද $k = 1, 2, 3, ...$ ද, $\overline{X}^0 \in \mathrm{R}^n$ අභිමතද, $\overline{c} \in \mathrm{R}^n$ සහ $\overline{X} = T\overline{X} + \overline{c}$ ද වේ.

මතුසම්බන්ධයි ...

Q6. (a) $u(x+\Delta x, t)$ සහ $u(x+2\Delta x, t)$ යන පද සඳහා ටේලර් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය භාවිත කරමින් $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ සඳහා පහත සඳහන් දෙවන ගණයේ අභිප අන්තර කාරක සන්නිකර්ෂණය (Second order forward difference approximation) ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

$$\frac{-3u(x,t)+4u(x+\Delta x,t)-u(x+2\Delta x,t)}{2\Delta x}.$$

තවද එහි ලෝප දෝෂය

$$\frac{\Delta x^2}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \text{ඉහල ගණයේ පද}$$

බව පෙන්වන්න.

(b) පහත සඳහන් ආරම්භක තත්ත්ව සහ මායිම් තත්ත්ව සහිත පලමු මානයේ අභිවහන සමීකරණය සලකන්න.

$$\begin{aligned} u_t+\beta u_x &= 0 \qquad & a<x<b \\ u(a,t)=h_1(t),\ u(b,t) &= h_2(t) \qquad & t>0 \\ u(x,0) &= f(x). \qquad & a\le x\le b \end{aligned}$$

i. මෙහි අවකාශ ව්‍යුත්පන්නය $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ දෙවන ගණයේ අභිප අන්තර කාරක සන්නිකර්ෂණයෙන්ද, කාල ව්‍යුත්පන්නය $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ පලමු ගණයේ අභිප අන්තර කාරක සන්නිකර්ෂණයෙන්ද ප්‍රතිස්ථාපනය කර ඉහත සඳහන් පලමු මානයේ අභිවහන ස්මීකරණයෙහි පරිමිත අන්තර සමීකරණය(finite difference scheme) ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

ii. ඉහත ලබා ගත් විවික්ත ආකාරය න්‍යාසයන් භාවිතයෙන් නිරූපණය කරන්න.

~~~~~~~~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~~~~~~~~