කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දූරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2022

2026 ජනවාරි / පෙබරවාරි

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

PMAT E 3063 - ප්‍රස්ථාර වාදය සහ අමූර්ත වීජය

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව: හතයි(07) **පිටු සංඛ්‍යාව:** හයයි(06) **කාලය:** පැය දෙක හමාරයි ($02\frac{1}{2}$)

ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (a) $G = (V, E)$ ප්‍රස්ථාරයක් සහ $u_0, u_1 \in V$ ලෙස ගනිමු. පහත ප්‍රකාශන වලින් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

   i. w යනු u_0 සිට u_1 දක්වා ඇති මාර්ගයකි(walk).

   ii. p යනු u_0 සිට u_1 දක්වා ඇති පෙතකි(path).

   iii. c යනු u_0 සිට u_1 දක්වා ඇති චක්‍රයකි(cycle).

[ලකුණු 15]

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ වන ලෙස පවතින A අනුයාත න්‍යාසයට අනුරූප ප්‍රස්ථාරය ඇඳ දක්වන්න.

[ලකුණු 15]

(c) i. ශීර්ෂ n ගණනක් ඇති සරල ප්‍රස්ථාරයක පැවතිය හැකි උපරිම දාර ගණන $\frac{n(n-1)}{2}$ බව පෙන්වන්න.

[ලකුණු 15]

මතු සම්බන්ධයි...

ii. $G = (V, E)$ වූ ප්‍රස්ථාරයක ශීර්ෂ 24 ක් සහ දාර 30 ක් ඇත. එහි ශීර්ෂ 5 ක මාත්‍රය 4 බැගින් ද, ශීර්ෂ 7 ක මාත්‍රය 1 බැගින් ද, ශීර්ෂ 7 ක මාත්‍රය 2 බැගින් ද වේ. ඉතිරි සියලුම ශීර්ෂ වල මාත්‍ර 3 හෝ 4 බැගින් වන්නේ නම්, ප්‍රස්ථාරයේ මාත්‍රය 4 වන ශීර්ෂ කීයක් තිබේ ද?

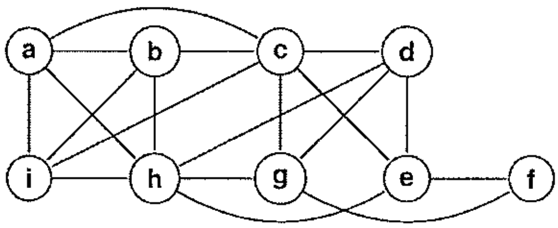
[ලකුණු 15]

(d) පහත දැක්වෙන ප්‍රස්ථාරය සඳහා

i. ඔයිලර් චක්‍රයක්

ii. හැමිල්ටෝනියානු චක්‍රයක් පවතී දැයි නිර්ණය කරන්න.

G :



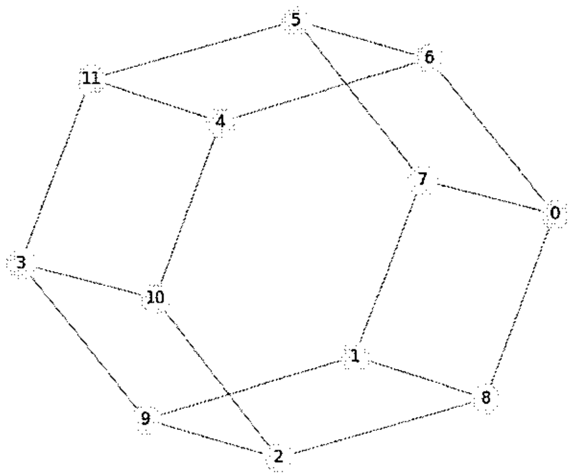
[ලකුණු 40]

2. (a) i. $G = (V, E)$ වූ ද්විශාඛ ප්‍රස්ථාරය අර්ථ දක්වන්න.

[ලකුණු 05]

ii. පහත දැක්වෙන ප්‍රස්ථාරය ද්විශාඛ වේ ද? ද්විශාඛ වේ නම් වියුක්ත ශීර්ෂ කුලක වෙන් කර දක්වන්න. එසේ නොවේ නම් හේතු දක්වන්න.

[ලකුණු 15]



මතු සම්බන්ධයි...

(b) n ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් විට ශීර්ෂ n ගණනක් අඩංගු සම්පූර්ණ ද්විශාඛ ප්‍රස්ථාරයක (complete bipartite graph) උපරිම දාර සංඛ්‍යාව $\frac{n^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

[ලකුණු 35]

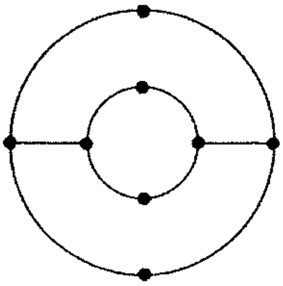
(c) i. G හා H යන ප්‍රස්ථාර දෙක සමරූපී (isomorphic) වේ යැයි කීමෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

[ලකුණු 10]

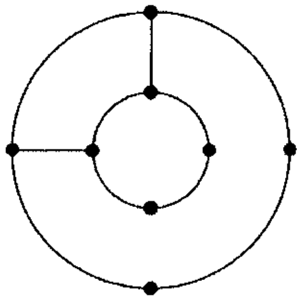
ii. පහත දැක්වෙන ප්‍රස්ථාර යුගලය සමරූපී වන්නේදැයි නිර්ණය කරන්න.

[ලකුණු 35]

G :



H :



3. (a) i. තලීය(Planar) ප්‍රස්ථාරයක් යන්නෙන් අදහස් වන්නේ කුමක් ද?

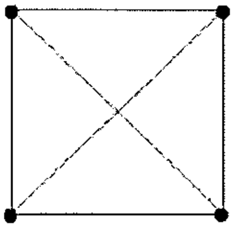
[ලකුණු 05]

ii. v ශීර්ෂ ගණනක්, e දාර ගණනක් සහ f මුහුණත් ගණනක් ඇති තලීය ප්‍රස්ථාරයක් සඳහා Euler සූත්‍රය ලියා දක්වන්න.

[ලකුණු 05]

iii. පහත ප්‍රස්ථාරය සඳහා Euler සූත්‍රය සත්‍යාපනය කරන්න.

[ලකුණු 20]



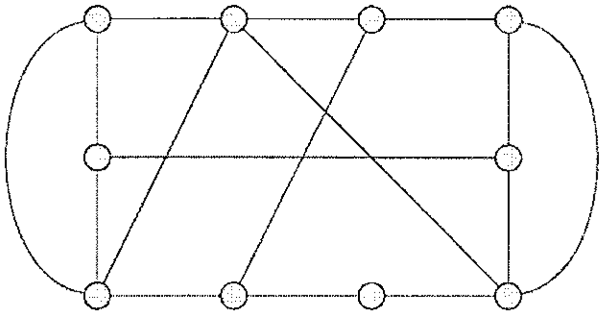
(b) i. කුරටොව්ස්කි(Kuratowski) ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

[ලකුණු 10]

මතු සම්බන්ධයි...

ii. පහත ප්‍රස්ථාරයේ තලීයතාවය නිර්ණය කරන්න.

[ලකුණු 60]



4. (a) $\langle G, * \rangle$ යනු සමූහයක් යැයි ගනිමු.

i. G හි ඒකක අවයවය

ii. $x \in G$ හි ප්‍රතිලෝමය

අනන්‍ය බව පෙන්වන්න.

[ලකුණු 30]

(b) $G = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$ යැයි ගනිමු. සියලු $x, y \in G$ සඳහා

$$x * y := x + y + xy$$

ලෙස අර්ථ දක්වමු.

i. $*$ යනු G මත ද්වීමය කර්මයක් බව පෙන්වන්න.

[ලකුණු 15]

ii. $\langle G, * \rangle$ යනු සමූහයක් බව සාධනය කරන්න.

[ලකුණු 35]

iii. $\langle G, * \rangle$ යනු ආබේලියානු සමූහයක් වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

[ලකුණු 10]

(c) සියලුම පරිමේය සංඛ්‍යා කුලකය $\mathbb{Q}$, ඒ මත අර්ථ දැක්වූ ගුණිතය $(\times)$ ගණිත කර්මය යටතේ සමූහයක් වේද? හේතු දක්වන්න.

[ලකුණු 10]

මතු සම්බන්ධයි...

5. (a) G යනු සමූහයක් යැයි ද a යනු G හි අභිමත අචල අවයවයක් යැයි ද ගනිමු. $H_a := \{x \in G : xa = ax\}$ යනු G හි උපසමූහයක් බව පෙන්වන්න.

[ලකුණු 30]

(b) i. සමූහයන් සඳහා වූ ලග්රාන්ජ් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

[ලකුණු 30]

ii. $1, 2, 5, 7, 9, 15, 60, 240$ සංඛ්‍යා අතුරින් ගනය 120 ක් වන සමූහයක උපසමූහයක ගනය විය හැකි අගයන් මොනවාද ?

[ලකුණු 10]

iii. G යනු සමූහයක් යැයි ද, $a, b \in G$ යැයි ද ගනිමු. $|\langle a\rangle| = 10$ සහ $|\langle b\rangle| = 21$ නම් $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{e\}$ බව පෙන්වන්න, මෙහි e යනු G හි ඒකක අවයවය වේ.

[ලකුණු 30]

6. (a) i. ප්‍රමත උපසමූහයක්(normal subgroup) යන්න අර්ථ දක්වන්න.

[ලකුණු 05]

ii. $H = \{a^2 : a \in G\}$ යනු G සමූහයේ උපසමූහයක් යැයි ගනිමු. H යන්න G හි ප්‍රමත උපසමූහයක් බව පෙන්වන්න.

[ලකුණු 30]

(b) i. $\langle G, *\rangle$ සහ $\langle H, \circ\rangle$ යනු සමූහ දෙකක් යැයි ද e යනු G හි ඒකක අවයවය යැයි ද ගනිමු. $\phi : G \to H$ අනුරූපතාව සරූපතාවක්(homomorphism) යැයි කීමෙන් අදහස් වන්නේ කුමක් දැයි අර්ථ දක්වන්න.
ϕ හි මදය $ker(\phi)$ අර්ථ දක්වන්න.

[ලකුණු 10]

ii. ϕ සරූපතාව එකට එක වූ ශ්‍රිතයක් නම් $ker(\phi) = \{e\}$ බව සාධනය කරන්න.

[ලකුණු 15]

(c) G යනු සමූහයක් යැයි ද, $a \in G$ යනු අචල අවයවයක් යැයි ද ගනිමු. $\phi : \mathbb{Z} \to G$ යන්න $\phi(n) := a^n$ ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

i. ϕ සමූහ සරූපතාවක් බව සාධනය කරන්න.

[ලකුණු 20]

ii. ϕ යන්න එකට එක වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

[ලකුණු 20]

මතු සම්බන්ධයි...

7. (a) R යනු ඒකක අවයවය සහිත වලයක් යැයි ගනිමු. සියලු $x, y \in R$ සඳහා $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ නම්, R යන්න න්‍යායදේශ වලයක් බව පෙන්වන්න.

[ලකුණු **25**]

(b) $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ලෙස ගනිමු. $(a, b), (c, d) \in S$ විට

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d)$$

සහ

$$(a, b) \otimes (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

ලෙස අර්ථ දක්වමු.

i. S යන්න $\oplus$ සහ $\otimes$ අනුබද්ධයෙන් වලයක් බව සාධනය කරන්න.

[ලකුණු **65**]

ii. S හි ඒකක අවයවය කුමක් ද?

[ලකුණු **10**]

*******///******