කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දූරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෙවන පරීක්ෂණය(බාහිර) – 2021

2024 - අගෝස්තු

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

PMAT E 3063 - ප්‍රස්ථාර වාදය හා අමූර්ත වීජය

ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : හතයි (07) **පිටු සංඛ්‍යාව: පහයි (05)** **කාලය: පැය දෙක හමාරයි ($02\frac{1}{2}$)**

---

1. (a) $G = (V, E)$ ප්‍රස්ථාරයක් සහ $v_0, v_n \in V$ ලෙස ගනිමු. පහත ප්‍රකාශන වලින් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

   (i) w යනු v_0 සිට v_n දක්වා ඇති මාර්ගයකි.

   (ii) p යනු v_0 සිට v_n දක්වා ඇති පෙතකි.

   (iii) c යනු v_0 සිට v_n දක්වා ඇති චක්‍රයකි.

   (b) පහත දැක්වෙන අනුයාත න්‍යාසය දී ඇති විට අනුරූප ප්‍රස්ථාරය ඇඳ දක්වන්න.

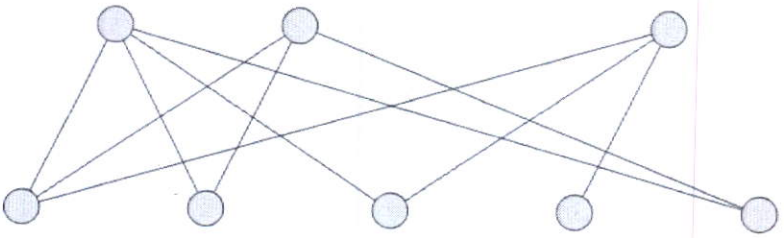
$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

   a ශීර්ෂයේ සිට d දක්වා වූ දිග 3 වන එකිනෙකට ස්වායත්ත මාර්ග ගණන සොයන්න.

   (c) (i) අවම වශයෙන් ශීර්ෂ දෙකක් සහිත සරල ප්‍රස්ථාරයක එකම මාත්‍රයන් ඇති ශීර්ෂ දෙකක් තිබිය යුතු බව පෙන්වන්න.

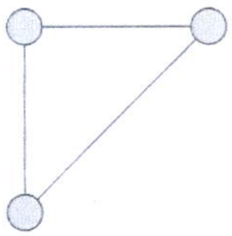
   (ii) මාත්‍ර අගයන් 2,2,4,4,4 වූ ශීර්ෂ 5 ක් සහිත සරල ප්‍රස්ථාරයක් පවතීද? එසේ නම් ප්‍රස්ථාරය අඳින්න. එසේ නැත්නම් ප්‍රස්ථාරය නොපවතින්නේ මන්දැයි පැහැදිලි කරන්න.

   (d) $G = (V, E)$ ප්‍රස්ථාරයෙහි උපප්‍රස්තාරයක් යනු කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.
   G යනු පහත ප්‍රස්ථාරය යැයි ගනිමු.



මතු සම්බන්ධයි...

පහත දැක්වෙන්නේ G හි උපප්‍රස්තාරයක්ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.



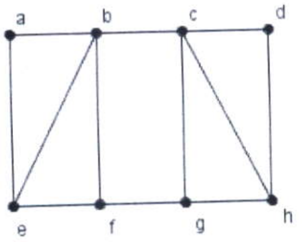
2. (a) ප්‍රස්ථාරයක, මාත්‍රය ඔත්තේ වන ශීර්ෂ ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(b) ද්විශාඛී ප්‍රස්ථාරය අර්ථ දක්වන්න.

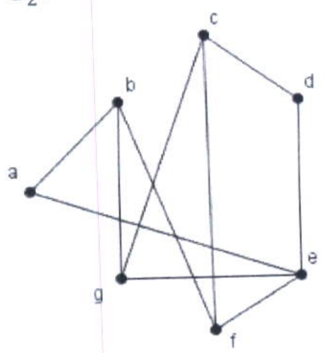
(i) n ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් විට n ශීර්ෂ ගණනක් අඩංගු සරල සම්පූර්ණ ද්විශාඛී ප්‍රස්ථාරයක උපරිම දාර සංඛ්‍යාව $\frac{n^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) පහත දැක්වෙන ප්‍රස්ථාර ද්විශාඛී දැයි නිර්ණය කරන්න.

G_1:



G_2:

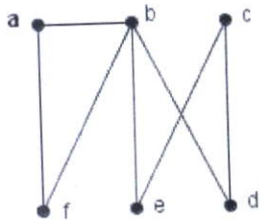


(c) ප්‍රස්ථාරයක ඔයිලර් චක්‍රය සහ හැමිල්ටෝනියානු චක්‍රය යන පද අර්ථ දක්වන්න.
පහත දැක්වෙන එක් එක් ප්‍රස්ථාරය සඳහා

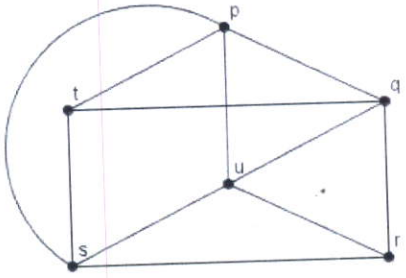
(i) ඔයිලර් චක්‍රයක්,

(ii) හැමිල්ටෝනියානු චක්‍රයක්, පවතී දැයි නිර්ණය කරන්න.

G:



H:

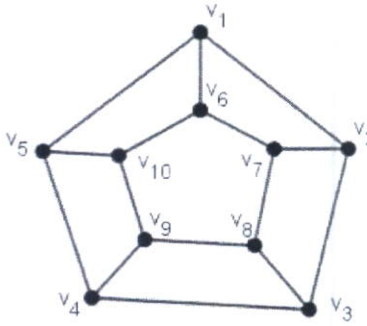


මතු සම්බන්ධයි...

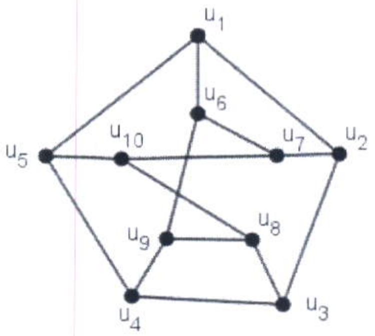
(d) G හා H යන ප්‍රස්ථාරය දෙක සමරූපී වේ යැයි කීමෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

පහත දැක්වෙන ප්‍රස්ථාර යුගලය සමරූපී දැයි නිර්ණය කරන්න. ඒවා සමරූපී නම් සමරූපතා ශ්‍රිතයක් ලියා දක්වන්න. ඒවා සමරූපී නොවේ නම් එක් ප්‍රස්ථාරයක් සතු වන නමුත් අනෙක් ප්‍රස්ථාරය සතු නොවන අවිචලක ගුණයක් සොයන්න.

G_1:



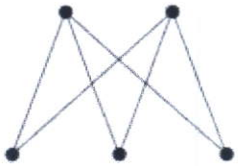
G_2:



3. තලීය ප්‍රස්ථාරයක් යන්නෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්ද?

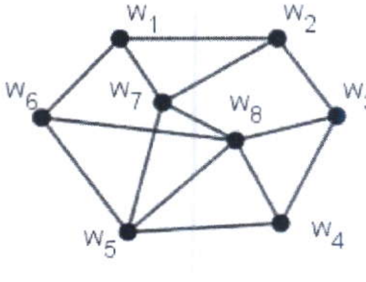
(a) (i) v ශීර්ෂ, e දාර සහ f මුහුණු සහිත සම්බන්ධිත G තල ප්‍රස්තාරයක් සඳහා Euler සූත්‍රය ලියා දක්වන්න

(ii) පහත සම්බන්ධිත ප්‍රස්ථාරය සඳහා Euler සූත්‍රය සත්‍යාපනය කරන්න



(b) (i) කුරටොස්කි ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) පහත ප්‍රස්ථාරයේ තලීයතාවය නිර්ණය කරන්න.



මතු සම්බන්ධයි...

4. (a) $(G,*)$ යනු සමූහයක් යැයි ගනිමු.

(i) G හි ඒකක අවයවය,

(ii) $x \in G$ හි ප්‍රතිලෝමය, අනන්‍ය බව පෙන්වන්න.

(b) S යනු 1 හැර සියළුම තාත්වික සංඛ්‍යා වලින් සෑදුන කුලකයක් යයි ගනිමු. S මත $*$ ගණිත කර්මය $a * b = a + b - ab$ ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

(i) $*$ යනු S මත ද්විමය කර්මයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) $\langle S,* \rangle$ යනු සමූහයක් බව පෙන්වන්න.

(iii) $\langle S,* \rangle$ යනු ආබේලියානු සමූහයක් වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(iv) S මත ගණය 3 වන අවයවයක් සොයන්න.

(c) සියලුම නිඛිලවල කුලකය, සාමාන්‍ය එකතු කිරීම ගණිත කර්මය යටතේ සමූහයක් වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

5. (a) (i) G සමූහයක H නොහිස් උපකුලකයක් G හි උපසමූහයක් වන්නේ සියලු $a, b \in H$ සඳහා $ab^{-1} \in H$ නම් හා නම්ම පමණක් බව පෙන්වන්න.

(ii) G යනු සමූහයක් සහ a යනු G හි අභිමත නමුත් නියත අවයවයක් යයි ගනිමු. $H = \{x \in G: xa^2 = a^2x\}$ යනු G හි උපසමූහයක් බව පෙන්වන්න.

(b) (i) සමූහ සඳහා ලග්රාන්ජ්ගේ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

(ii) H යනු K හි උපසමූහයක් සහ K යනු G හි උපසමූහයක් යයි ගනිමු. $|H| = 4$ සහ $|G| = 24$ නම් $|K|$ සඳහා ගත හැකි අගයන් මොනවාද?

(iii) G හි ඕනෑම x අවයවයක් සඳහා x හි ගණය මගින් G හි ගණය බෙදෙන බව අපෝහනය කරන්න.

6. (a) (i) ප්‍රමත උපසමූහයක් අර්ථ දක්වන්න.

(ii) G යනු සමූහයක් යයි ගනිමු. G හි මධ්‍යය $Z(G)$ යන්න $Z(G) = \{z \in G: gz = zg, for\ all\ x\ \in G\}$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත.

$Z(G)$, G හි ප්‍රමත උපසමූහයක් බව පෙන්වන්න.

(b) $(G, *)$ සහ $(H, \circ)$ යනු සමූහ දෙකක් යැයි ද e යනු G හි ඒකක අවයවය යැයි ද ගනිමු. $\phi: G \to H$ අනුරූපතාව සරූපතාවක් යැයි කීමෙන් අදහස් වන්නේ කුමක් දැයි අර්ථ දක්වන්න. ϕ හි මදය, $ke\,r(\phi)$, අර්ථ දක්වන්න.

(i) ϕ සරූපතාව එකට එක වූ ශ්‍රිතයක් නම් හා නම්ම පමණක් $Ker(\phi) = \{e\}$ බව සාධනය කරන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

(ii) G යනු $\det(A) \neq 0$ වන සියලු 2×2 න්‍යාස A වලින් සමන්විත, න්‍යාස ගුණනය යටතේ වූ සමූහය යැයිද H යනු ශූන්‍ය නොවන තාත්වික සංඛ්‍යා වලින් සමන්විත සමූහය යැයිද ගනිමු.

$\phi: G \to H$ යන්න $\phi\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = ad - bc$ ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

(α) ϕ සමූහ සරූපතාවක් බව සාධනය කරන්න.

(β) $Ker\ \varphi$ සොයන්න.

(γ) ϕ එකට එක වේද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

7. (a) පහත එක එකක් සඳහා උදාහරණයක් බැගින් දෙන්න.

(i) න්‍යාදේශ වලයක්.

(ii) අනුකල වසමක්.

(iii) ක්ෂේත්‍රයක්.

(b) $a, b \in \mathbb{Z}$ විට $a \oplus b = a + b + 1$ සහ $a \otimes b = a + b + ab$ අර්ථ දක්වමු.

(i) $\mathbb{Z}$ යන්න $\oplus$ හා $\otimes$ අනුබද්ධයෙන් න්‍යාදේශ වලයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) එම වලයෙහි ශූන්‍ය අවයවය කුමක්ද?

(iii) එම වලයට ඒකක අවයවයක් ඒකක තිබේද

(c) R යනු සියලු $a \in R$ සඳහා $a^2 = a$ වන වලයක් යැයි ගනිමු. R න්‍යාදේශී වන බව පෙන්වන්න.

**************//**************