කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය-ශ්‍රී ලංකාව

දූරස්ථ හා අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි පරීක්ෂණය (බාහිර) -2019(පැරණි නිර්දේශය)

ශුද්ධ ගණිතය

සංකීර්ණ විචල්‍යය- PMAT E 3043

ප්‍රශ්ණ සංඛ්‍යාව : හතයි(07) **පිටු සංඛ්‍යාව : තුනයි (03)** **කාලය : පැය දෙක හමාර ($02\frac{1}{2}$) යි**

ප්‍රශ්ණ පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

01. (අ) පහත දී ඇති ප්‍රදේශ ආගන්ඩ් තලය මත වෙන වෙනම අදින්න.

(i) $\left\{z: \frac{\pi}{2} < Arg\, z < \frac{3\pi}{4}\right\}$.

(ii) $\{z: |z - 4i + 2| > 2\}$.

(ආ) $z = x + iy$ යයි ගනිමු. $\bar{z} = \frac{9}{z}$ සමීකරණය තෘප්ත කරන x සහ y අගයන් සොයන්න.

(ඇ) $z = \frac{i}{1+i}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවෙහි මාපාංකය සහ ප්‍රධාන විස්තාරය සොයන්න. එනයින් සුපුරුදු අංකනයෙන් $z = re^{i\theta}$ මගින් ප්‍රකාශ කරන්න.

(ඈ) $f(z) = \frac{1}{i-z}$ සංකීර්ණ ශ්‍රිතය

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

යන ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

02. (අ) $f(z)=z$ සංකීර්ණ ශ්‍රිතය, ඕනෑම $z \in \mathbb{C}$ සඳහා අවකල්‍යය බව පෙන්වන්න.

(ආ) $\varepsilon - \delta$ අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $\lim_{z \to i} \frac{2z^2+4iz+6}{z-i} = 8i$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $f(z) = (\bar{z} + 1)^3 - 3\bar{z}$ විශ්ලේෂී නොවන ශ්‍රිතයක් බව පෙන්වන්න.

(ඈ) $u(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy$ ශ්‍රිතයෙහි අනුවර්ති ප්‍රතිබද්ධය සොයන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

03. (අ) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ශ්‍රිතය D වසමෙහිදී විශ්ලේෂී වේ නම් D හි ඕනෑම z ලක්ෂ්‍යයකදී $f(z)$ හි $f'(z)$ ව්‍යුත්පන්නය $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

එනයින් f ශ්‍රිතය සඳහා D දී කෝෂි-රීමාන් සමීකරණ ලබා ගන්න.

තවදුරටත් u සහ v සඳහා සන්තතික දෙවන ගණයේ ආංශික අවකල D දී පවතී නම්, ඒවා D දී අනුවර්තී වන බව පෙන්වන්න.

(ආ) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ ශ්‍රිතය සලකන්න.

(i) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ අනුවර්තී වන බව සාධනය කරන්න.

(ii) $f(z) = u + iv$ විශ්ලේෂී වන පරිදි v සොයන්න.

04. (අ) $\int_{|z|=1} \frac{(2z-1)^3}{(z+2)(z-3)}\, dz$ අනුකලය අගයන්න.

(ආ) $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ යෙහි $z = 0$ ලක්ෂ්‍යය වටා බල ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය

$$f(z) = -1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}$ ශ්‍රිතය සඳහා $0 < |z| < 2$ ප්‍රදේශය සඳහා වලංගු වන ලෝරන්ට්ස්ගේ ප්‍රසාරණය සොයන්න.

05. (අ) C වක්‍රය ඇතුලත සහ මායිමේ $f(z)$ ශ්‍රිතය විශ්ලේෂී වේ . $z = a$ යනු C වක්‍රය ඇතුලත ලක්ෂ්‍යයක් වේ.

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz; \quad n = 0,1,2,\ldots$$ බව ඔප්පු කරන්න.

මෙහි $f^{(n)}(a)$ යනු $z = a$ ලක්ෂ්‍යයදී $f(z)$ n වැනි අවකලනය සහ $f^{(0)}(a) = f(a)$ වේ.

(ආ) පහත අනුකල අගයන්න.

(i) $\oint_C \frac{e^{2z}}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3} dz$, $C : |z| = 1$.

(ii) $\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-4)} dz$, $C : |z| = 3$.

මතු සම්බන්ධයි...

(ඇ) $\left|\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz\right| \le \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$ බව පෙන්වන්න.
මෙහි $\gamma(\theta) = R\, e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$.

06. (අ) පහත ඒකලිත අපූර්වතා අර්ථ දක්වන්න:

(i) ගණය n වූ ධ්‍රැවයක්

(ii) ඉවත් කල හැකි අපූර්වතාවය

(iii) අත්‍යාවශ්‍ය අපූර්වතාවය

(ආ) පහත ශ්‍රිතයන්හි ඒකලිත අපූර්වතා නිර්ණය කර ඒවා වර්ගීකරණය කරන්න:

(i) $\frac{e^{2z}-1}{z}$ (ii) $e^{1/z}$ (iii) $\frac{z}{\left(z^2-\frac{\pi^2}{4}\right)}$.

(ඇ) $z = e^{i\theta}$ යැයි ගනිමු.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(n\theta) = \frac{a \cos\theta - a^2}{1 - 2a \cos\theta + a^2}$$

බව පෙන්වන්න.

($0 < |a| < |z| < \infty$ සඳහා $\frac{a}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$ උපකල්පනය කරන්න.)

07. (අ) අවශිෂ්ට ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

(ආ) සුදුසු ඉරවලු අනුකල සැලකීමෙන්,

(i) $\int_0^{2\pi} \frac{4\, d\theta}{4-4\cos\theta+1} = \frac{8\pi}{3}$

(ii) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$

බව පෙන්වන්න.

****