කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2021

2024 සැප්තැම්බර්

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

PMAT E 3043 - සංකීර්ණ විචල්‍ය

ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : හතයි (07)   පිටු සංඛ්‍යාව: තුනයි (03)   කාලය: පැය දෙක හමාරයි ($02\frac{1}{2}$)

---

01. (අ) පහත දී ඇති එක් එක් සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවන් $a + ib$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

(i) $\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$ (ii) $(1+i)^{2024}$,

මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

(ආ) පහත දී ඇති ප්‍රදේශ ආගන්ඩ් තලය මත අඳින්න.

(i) $\{z: Re\, z \ \geq 2\, Im\, z\}$ (ii) $\{z: |z - 4i + 2| \ > 2\}$

(ඇ) $\bar{z} = z$ විසඳන්න.

02. (අ) $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ සීමාව නොපවතින බව පෙන්වන්න.

(ආ) $f(z)$ සංකීර්ණ ශ්‍රිතය $z = 0$ හිදී සන්තතික වේ දැයි නිර්ණය කරන්න, මෙහි

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^3}{z^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$ වේ.

(ඇ) $f(z)$ ශ්‍රිතය $z = z_0$ හිදී සන්තතික නම්, $|f(z)|$ සන්තතික බව පෙන්වන්න.

03. (අ) තලයක් සඳහා වූ ග්‍රීන්ගේ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

(ආ) $\oint_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ සඳහා, තලයක් සඳහා වූ ග්‍රීන්ගේ ප්‍රමේයය තහවුරු කරන්න, C යනු $y = x^2$ සහ $y = x$ විසින් සීමා කරන ලද පෙදෙස වට වූ සංවෘත වක්‍රය වේ.

(ඇ) $f(z)$ ශ්‍රිතය $z = z_0$ දී ඇදි අරය r වන γ වෘත්තය ඇතුලතදී සහ මතදී විශ්ලේෂී වේ යයි ගනිමු. එවිට

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{M\,n!}{r^n} \quad , \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

බව සාධනය කරන්න, මෙහි M යනු γ වෘත්තය මතදී $|f(z)| < M$ වන පරිදි වූ නියතයක් වන අතර $f^{(n)}$ යනු f හි n වැනි අවකලජය වේ.

04. (අ) සංකීර්ණ තලයෙහි D වසමකදී $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ යයි ගනිමු, මෙහි $u(x,y)$ සහ $v(x,y)$ තාත්වික අගීය ශ්‍රිතයන් වේ. u සහ v හි පළමු වැනි ගණයේ අවකල සංගුණක සන්තතිකව පවතින අතර u සහ v මගින් කෝෂි-රීමාන් සමීකරණ වන

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{සහ} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

තෘප්ත කරන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමු.

(i) $f = u + i\,v$ විශ්ලේෂී වන බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(z) = (x^2 - y^2) - 2xyi$ ශ්‍රිතය විශ්ලේෂී වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

(ආ) (i) $\mathbb{C}$ මත දී $u(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ අනුවර්තීය වන බව පෙන්වන්න.

(ii) $u + i\,v$ විශ්ලේෂී වන පරිදි $\mathbb{C}$ මත දී u හි අනුවර්තීය ප්‍රතිබද්ධය වන $v(x,y)$ සොයන්න.

05. (අ) $\int_\gamma z^2 dz$ අගයන්න, මෙහි γ යනු 0 සිට $1 + i$ තෙක් වූ රේඛා ඛණ්ඩය වේ.

(ආ) (i) කෝෂි ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) γ යනු සරල සංවෘත වක්‍රයක් සහ $z = a$ ලක්ෂ්‍යය

(අ) γ වලින් පිටත (ආ) γ ඇතුලත

ඇති විට දී $\oint_\gamma \frac{dz}{(z-a)}$ අගයන්න.

(ඇ) කෝෂිගේ අනුකල සමීකරණ භාවිතයෙන්,

$$\oint_\gamma \frac{z}{z^2+1} dz = \pi i$$

බව සාධනය කරන්න, මෙහි γ යනු $|z - i| = \frac{1}{2}$ වෘත්තය වේ.

මතු සම්බන්ධයි...

06. (අ) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ ශ්‍රිතය

(i) $1 < |z| < 3$

(ii) $0 < |z-2| < 2$

ප්‍රදේශ සඳහා වලංගු වන ලෝරන්ට්ස් ශ්‍රේණියක් ඇසුරෙන් ප්‍රසාරණය කරන්න.

(ආ) පහත එක් එක් ශ්‍රිතයේ දක්වා ඇති අපූර්වතාවය වටා ලෝරන්ට්ස්ගේ ප්‍රසාරණය සොයා එක් එක් අවස්ථාවෙහිදී එම අපූර්වතාවන් වර්ගීකරණය කරන්න:

(i) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $z = 1$ වටා

(ii) $f(z) = (z-3)\, sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$, $z = -2$ වටා.

07. (අ) පරාමිතික නිරූපණය භාවිතා කරමින්, $\int_C f(z)dz$ අනුකලය අගයන්න

මෙහි $f(z) = \frac{z^2-1}{z}$ සහ C යනු $z = 2e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ වන අර්ධ වෘත්තයකි.

(ආ) අවශිෂ්ට ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

(ඇ) සුදුසු ඉරවලු අනුකල භාවිතයෙන්

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2-\cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

බව පෙන්වන්න.

****