



කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථීම් සහ ආධිත්‍යීය ආධිකාපන කේෂ්ට්‍රය

ඁාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි කෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2021

2024 සැප්තැම්බර්

විද්‍යා පියය

දුද්ධ ගණනය

ශ්‍රී නෑතු අනුත්‍ම සහ රීමාන් අනුකූලවාදය PMAT - E 3033

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව: ඩත (07) පිටු සංඛ්‍යාව: තුන(03) සි කාලය: පැය දෙක හමාර $\left(2\frac{1}{2}\right)$ සි

ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

01. (අ) S කුලකයක් මත අර්ථ දක්වන ලද $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ශ්‍රී නෑතු අනුත්‍මයක $f(x)$ ශ්‍රී නෑතු අනුත්‍මයක මතට ලක්ෂීය වශයෙන් අභිසාරීවේ සහ ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරීවේ යන පද අර්ථ දක්වන්න, මෙහි $S \subseteq \mathbb{R}$ වේ.

f_n යනු $f_n(x) = x^2 + \frac{x}{n}$ මගින් අර්ථ දක්වන ලද $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ශ්‍රී නෑතු යයි ගනිමු, මෙහි $n \in \mathbb{N}$ වේ.

f_n ලක්ෂීය ලෙස අභිසාරී බව පෙන්වා එම සීමාවද සොයන්න.

- (ආ) $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ශ්‍රී නෑතු අනුත්‍මය, $[0, b]$ ප්‍රාන්තරය තුළදී 0 ට ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වුවද $[0,1]$ ප්‍රාන්තරය තුළදී ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී නොවන බව පෙන්වන්න, මෙහි

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \text{ වන අතර } 0 < b < 1 \text{ වේ.}$$

- (ඇ) $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ශ්‍රී නෑතු අනුත්‍මය $[0,1]$ ප්‍රාන්තරය තුළදී $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ ට ලක්ෂීය ලෙස අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න, මෙහි $f_n(x) = x^n$ වේ.

ශ්‍රී නෑතු අනුත්‍ම සංඛ්‍යා විශ්වවිද්‍යාලය සැලකීමෙන්, $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ශ්‍රී නෑතු අනුත්‍මය $f(x)$ ට ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වේ දැයි තිරණය කරන්න.

මත සම්බන්ධයි...

02. $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ ග්‍රීත අනුකූලයක් තම $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරී වීම සඳහා විසේස්ට්‍රාස්-M (Weistrass-M test) පරික්ෂාව ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

\mathbb{R} මතදී පහත ග්‍රීත් වල අභිසාරීතාවය සාකච්ඡා කරන්න.

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} \quad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

03. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ යනු සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $a_n \neq 0$ වන ලෙස වූ බල ග්‍රීත් යයි ගනිමු. අනුපාත පරික්ෂාව ඇසුරෙන් ඉහත බල ග්‍රීත් ය.

- (අ) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා
 (ආ) $x = 0$ සඳහා පමණක්

අභිසාරී වන අවස්ථා සාකච්ඡා කරන්න.

පහත බල ග්‍රීත් වල අභිසාරීතා අරයයන් සහ අභිසාරීතා ප්‍රාන්තර නිර්ණය කරන්න.

$$(i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{4^n} \quad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$$

04. $x = 0$ වටා $\frac{1}{(1+x)}$ හි වේලර් ග්‍රීත් ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.

$$|x| < 1 \text{ සඳහා } \frac{1}{(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

$$\text{එනයින් } \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \text{ බව පෙන්වා } \ln\left(\frac{3}{2}\right) \text{ නිමාණය කරන්න.}$$

05. (අ) සුපුරුදු අංකනයෙන්, $U(f, P), L(f, P), U(f)$ සහ $L(f)$ අර්ථ දක්වන්න.

- (ආ) $[a, b]$ ප්‍රාන්තරය මත f ග්‍රීතය රිමාන් අනුකූලය වීමට ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතාවය වන පහත දැක්වෙන කෝෂී උපමානය:

“එක් එක් $\varepsilon > 0$ සඳහා $U(f, P_n) - U(f, P_m) < \varepsilon$ වන පරිදි $[a, b]$ හි P_n විහාගනයක් පවතී නම් $[a, b]$ ප්‍රාන්තරය මත f ග්‍රීතය රිමාන් අනුකූලය වේ”

සාධනය කරන්න.

$$(ඇ) \quad f(x) = x^3 \text{ සහ } [0, 1] \text{ මත } P_n \text{ විහාගනය } P_n = \left\{ \frac{i}{n} : 0 \leq i \leq n \right\} \text{ යයි ගනිමු.}$$

සුපුරුදු අංකනයෙන්,

- (i) $U(P_n, f)$ සහ $L(P_n, f)$ ගණනය කරන්න.
 (ii) $[0, 1]$ මත $f(x)$ රිමාන් අනුකූලය බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

(iii) $\int_0^1 x^3 dx$ റിഗ്രേജ് കൊണ്ട്.

[ඔබට $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ප්‍රතිඵලය හාවිතා කළ හැකියි.]

06. (ඁ) $[a, b]$ ප්‍රාන්තරය තුළ සියලු සන්තතික ශ්‍රීත රිමාන් අනුකලා බව පෙන්වන්න.

(ආ) f ශ්‍රීතය රිමාන් අනුකලයා තම $|f|$ ද රිමාන් අනුකලයා බව පෙන්වන්න.

(၅၇) f ဆဟ g အနဲ့ $\int_a^b f = \int_a^b g$ သန ဖရိုင် ပါ ဆန်းတန်းက ဖြစ် ငောက် ထူး ဖော် ပေါ်မှု.

$f(c) = g(c)$ වන පරිදි $c \in (a, b)$ පවතින බව පෙන්වන්න.

07. (ආ) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ සහ $\int_a^b g(x)dx$ විෂම අනුකල වල අභිසාරීතාවය අර්ථ දක්වන්න, මෙහි $g(x)$ යනු $x = a$ තිදි සපර්යන්ත නොවන ප්‍රිතයකි.

(ආ) පහත දැක්වෙන විෂම අනුකූල වල අභිසාරීතාවය පරික්ෂා කරන්න.

$$(i) \quad \int_1^{\infty} xe^{-x} dx \quad (ii) \quad \int_0^3 \frac{1}{x-1} dx \quad (iii) \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$
