



කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අධ්‍යාපන අධ්‍යයන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2019

2023 දෙසැම්බර්

විද්‍යා පීඨය

ගුද්ධ ගණිතය

සංකීර්ණ විචල්‍යය PMAT - E 3043

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : හතයි(07) පිටු සංඛ්‍යාව : හතරයි(04) කාලය : පැය දෙක හමාර (02½) යි

ප්‍රශ්න පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

01. (අ) $2|z - 3i| = |z|$ සමීකරණය තෘප්ත කරන සියලුම z හි පථය සොයන්න.
- (ආ) z යනු $-1 + 3i$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව යයි ගනිමු. $z^2 + pz$ තාත්වික වන පරිදි p තාත්වික සංඛ්‍යාව නිර්ණය කරන්න.
- (ඇ) $\frac{2z+1}{iz+1}$ හි අතාත්වික කොටස -2 වේ නම්, ආගන්ධ තලයෙහි z නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යයෙහි පථය සරල රේඛාවක් බව පෙන්වන්න.
- (ඈ) $(1 + i)^{-1}$ ගණනය කරන්න.

02. (අ) $f(z) = x^2 + y^2 + i(y^2 - x)$ යැයි ගනිමු.
- (i) $f(z)$ කෝෂි-රිමාන් සමීකරණ තෘප්ත කරන
- (ii) $f(z)$ අවකල්‍යය වන
- (iii) $f(z)$ විශ්ලේෂී වන
- $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ලක්ෂ්‍ය සොයන්න.

(ආ) $f(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{z^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ යයි ගනිමු.

\mathbb{C} හි සෑම තැනකදීම $f(z)$ සන්තතික වන බව සහ $z = 0$ දී $f'(z)$ නොපවතින බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

(ඇ) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$, $z \neq \pm i$ විට $f'(z)$ සොයන්න.

03. (අ) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ශ්‍රිතය D වසමෙහිදී විශ්ලේෂී වේ නම් D හි ඕනෑම z ලක්ෂ්‍යයකදී $f(z)$ හි $f'(z)$ ව්‍යුත්පන්නය $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

එනමින් f ශ්‍රිතය සඳහා D දී කෝෂි-රිමාන් සමීකරණ ලබා ගන්න.

තවදුරටත් u සහ v සඳහා සන්තතික දෙවන ගණයේ ආංශික අවකල D හි දී පවතී නම්, ඒවා D හි දී අනුවර්තී වන බව පෙන්වන්න.

(ආ) (i) $u(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x + xy$ අනුවර්තී වන බව සාධනය කරන්න.

(ii) $f(z) = u + iv$ විශ්ලේෂී වන පරිදි v සොයන්න.

04. (අ) (i) $z = 0$ සිට $z = 1 + i$ දක්වා සරල රේඛාව

(ii) $z = 0$ සිට $z = 1$ දක්වා තාත්වික රේඛාව ඔස්සේ සහ $z = 1$ සිට $z = 1 + i$ දක්වා අතාත්වික අක්ෂයට සමාන්තර රේඛාවක් ඔස්සේ

$\int_0^{1+i} (x - y + ix^2) dz$ රේඛා අනුකලය අගයන්න.

(ආ) C සඳහා $\int_C f(z)dz$ ඉරවලු අනුකලය අගයන්න, මෙහි $f(z) = \frac{z^2-1}{z}$ වන අතර C වක්‍රය

(i) $z = 2e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq \pi)$ අර්ධ වෘත්තය

(ii) $z = 2e^{i\theta} (\pi \leq \theta \leq 2\pi)$ අර්ධ වෘත්තය

(iii) $z = 2e^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ වෘත්තය

මගින් ලබා දේ.

05. (අ) තලීය ග්‍රීන් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$\oint_C (2x - y^2)dx - xy dy$ හි අගය සෙවීමට තලීය ග්‍රීන් ප්‍රමේයය යොදා ගන්න,
 C යනු $x^2 + y^2 = 1$ සහ $x^2 + y^2 = 9$ වෘත්ත මගින් පිරිවැසුණ පෙදෙසෙහි මායිම වේ.

(ආ) කෝෂිගේ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$\int_C \frac{dz}{z^2(z-2)(z-4)}$ අගයන්න, මෙහි $(-1, -1), (3, -1), (3, 1)$ සහ $(-1, 1)$ යා කරන
 සෘජුකෝණාස්‍රය වේ.

[ඉභිය: ඔබට $\oint (z - a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$ ප්‍රතිඵලය භාවිතා කළ හැක.]

(ඇ) පහත අනුකල අගයන්න.

(i) $\oint_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(z^2+4)^2} dz$

(ii) $\oint_{|z-2|=4} \frac{4}{z(z-2)} dz$

(iii) $\oint_{|z|=1} \frac{z^3}{z^2+5z+6} dz$

06. (අ) පහත ඒකලීන අපූර්වතා අර්ථ දක්වන්න:

(i) ගණය n වූ මූලවයක්

(ii) ඉවත් කළ හැකි අපූර්වතාවය

(iii) අත්‍යාවශ්‍ය අපූර්වතාවය

(ආ) පහත ශ්‍රිතයන්හි ඒකලීන අපූර්වතා නිර්ණය කර ඒවා වර්ගීකරණය කරන්න:

(i) $\frac{\sin(z-a)}{(z-a)}$

(ii) $\sin\left(\frac{1}{z-a}\right)$

(iii) $\frac{z-2}{z^2} \sin\left(\frac{1}{z-a}\right)$.

මතු සම්බන්ධයි...

(ඇ) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ ශ්‍රිතය සඳහා

(i) $1 < |z| < 3$

(ii) $|z| > 3$

ප්‍රදේශයන් සඳහා වලංගු වන ලෝරන්ට්ස්ගේ ප්‍රසාරණය සොයන්න.

07. (අ) අවශිෂ්ට ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

(ආ) අවශිෂ්ට ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{1+z^2} dz$$

අනුකලය අගයන්න.

(ඇ) සුදුසු ඉරවලු අනුකල සැලකීමෙන්,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

බව පෙන්වන්න.
