කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2019

2023 දෙසැම්බර්

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

ශ්‍රිත අනුක්‍රම සහ රීමාන් අනුකලවාදය **PMAT – E 3033**

ප්‍රශ්ණ සංඛ්‍යාව: හත (07) යි පිටු සංඛ්‍යාව: දෙක(02) යි කාලය: පැය දෙක හමාර $\left(2\frac{1}{2}\right)$ යි

ප්‍රශ්ණ පහකට (05) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

01. පහත දැක්වෙන ශ්‍රිත දී ඇති ප්‍රාන්තරය තුල ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරීවන බව පෙන්වන්න.

(i) $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$ $(-\infty, \infty)$

(ii) $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$ $(0, \infty)$

(iii) $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ $(-1,1)$

(iv) $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$ $[0,1]$

02. (a) $\int_a^\infty f(x)dx$ සහ $\int_a^b g(x)dx$ අනුචිත අනුකල වල අභිසාරීතාව අර්ථ දක්වන්න; මෙහි $g(x)$ යනු $x = a$ හිදී සපර්යන්ත නොවන ශ්‍රිතයකි.

(b) පහත දැක්වෙන අනුචිත අනුකල වල අභිසාරීතාව පරීක්ෂා කරන්න.

(i) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}dx$ (ii) $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x-2)}dx$ (iii) $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^p}dx$

03. $f_n: A \to \mathbb{R}$ ශ්‍රිත අනුක්‍රමයක් නම් $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ ඒකාකාරී ලෙස අභිසාරීවීම සඳහා වන වයිස්ට්‍රාස් M පරීක්ෂාව ප්‍රකාශකර සාධනය කරන්න.

පහත ශ්‍රිත ශ්‍රේණිවල අභිසාරීතාව සාකච්ඡා කරන්න.

(i) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x}{n(1+nx^2)}$ (ii) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4^n}\sin(3^n x)$

04. $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ යනු සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $a_n \neq 0$ වන ලෙස වූ බල ශ්‍රේණියක් යයි ගනිමු. අනුපාත පරීක්ෂාව ඇසුරෙන් ඉහත බල ශ්‍රේණිය

(a) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා

(b) $x = 0$ සඳහා පමණක්

අභිසාරී වන අවස්ථා සාකච්ඡා කරන්න.

පහත බල ශ්‍රේණි වල අභිසාරිතා අරයයන් සහ අභිසාරිතා ප්‍රාන්තර නිර්ණය කරන්න.

(i) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x}{n(1+nx^2)}$ (ii) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4^n}\sin(3^n x)$

අනෙක් පිට...

05. $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය තුල $f:[a,b] \to \mathrm{R}$ සපර්යන්ත ශ්‍රිතය රීමාන් අනුකලා වන්නේ යයි කීමෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්ද ?

(i) $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය තුල සියලු සන්තතික ශ්‍රිත රීමාන් අනුකලා බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ යයි ගනිමු.

$[0,2]$ මත f සන්තතික හා රීමාන් අනුකලා බව පෙන්වන්න.

(iii) f රීමාන් අනුකලා නම් $|f|$ ද රීමාන් අනුකලා බව පෙන්වන්න .

06. (i) සුපුරුදු අංකනයෙන්, $U(f,P)$, $L(f,P), U(f)$ සහ $L(f)$ අර්ථ දක්වන්න.

(ii) $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය මත f ශ්‍රිතය රීමාන් අනුකලා වීමට ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතාවය වන පහත දැක්වෙන කෝෂී උපමානය;

"එක් එක් $\varepsilon > 0$ සඳහා $U(f,P_n) - L(f,P_n) < \varepsilon$ වන පරිදි $[a,b]$ හි P_n විභාගනයක් පවතී නම් $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය මත f ශ්‍රිතය රීමාන් අනුකලා වේ"

සාධනය කරන්න.

(iii) $f(x) = 1 - x^2$ ශ්‍රිතය $[0,1]$ මත අර්ථ දක්වා ඇතැයි ද $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{,n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ යනු $[0,1]$ හි විභාගනයක් යයි ද ගනිමු.

$\lim_{n\to\infty}\left(U(f,P_n) - L(f,P_n)\right)$ සොයා $[0,1]$ ප්‍රාන්තරය මත f ශ්‍රිතය රීමාන් අනුකලා බව අපෝහනය කරන්න.

07. $|x| < 1$ සඳහා $x = 0$ වටා $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ හි ටේලර් ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න.
කෝෂී ආකාරයේ වන ශේෂය ද ලියන්න.

එනයින් $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ හි ටේලර් ප්‍රසාරණය ලබා ගන්න.