කැලණිය විශ්ව විද්‍යාලය- ශ්‍රී ලංකාව

දූරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි පළමු පරීක්ෂණය (බාහිර)- 2016

2025 ජූනි

විද්‍යා පීඨය

ව්‍යවහාරික ගණිතය- AMAT - E 1025

යාන්ත්‍ර විද්‍යාව I

ප්‍රශ්ණ සංඛ්‍යාව: හත (07)යි　　පිටු සංඛ්‍යාව: හතර(04) යි　　කාලය: පැය තුන(03)යි

ප්‍රශ්ණ හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

01. සුපුරුදු අංකනයෙන්, සිලින්ඩරාකාර ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංකවලින්, අංශුවක ප්‍රවේගය හා ත්වරණය පිලිවෙලින් $\underline{v} = \dot{r}\underline{l} + r\dot{\theta}\underline{m} + \dot{z}\underline{n}$ හා $\underline{f} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\underline{l} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)\underline{m} + \ddot{z}\underline{n}$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න.

සුමට තිරස් මේසයක් මත වූ ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් දිග l වූ සුමට අප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවකින් සමාන ස්කන්ධයක් සහිත වෙනත් Q අංශුවකට ගැට ගසා ඇත. තන්තුව මේසයෙහි O නම් කුඩා සිදුරක් ඔස්සේ යන අතර OQ සිරස් වන ලෙස Q අංශුව එල්ලෙමින් ඇත. ආරම්භයේදී තන්තුව $OP = a\left(< \frac{l}{2}\right)$ ලෙස නොබුරුල් වන අතර අංශු නිශ්චලතාවයෙහි තබා ඇත. P අංශුවට OP ට ලම්බව u හා OP දිශාවට v සංරචක සහිත ප්‍රවේගයක් මේසය දිගේ දෙනු ලැබේ.

(අ) අංශු වලට වෙන වෙනම චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

(ආ) OP, r ට සමාන වෙමින් මුල් දිශාව සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$ සහ $2\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g = 0$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) ඒනයින්, $r^2\dot{\theta} = h$ හා $\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} - gr = c$ බව පෙන්වන්න, මෙහි h හා c නියත වේ.

මතු සම්බන්ධයි...

02. (අ) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ඒකක ස්කන්ධයට P කේන්ද්‍රික බලයක් යටතේ චලනය වන අංශුවක පථය සඳහා $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}$ අවකල සමීකරණය ලබාගන්න.

(ආ) අංශුවක් ඒකක ස්කන්ධයකට $\frac{\mu}{r^5}$ කේන්ද්‍රික බලයක් යටතේ චලනය වේ; මෙහි μ නියතයක් වන අතර r යනු බල කේන්ද්‍රයේ සිට අංශුවට ඇති දුරයි. $\sqrt{\frac{\mu}{2a^4}}$ ප්‍රවේගයකින් O සිට a දුරකින් පිහිටි A දුරාන්තයක (apse) සිට OA ට ලම්බව අංශුව ප්‍රක්ෂේපනය කෙරෙයි නම්, එය වෘත්තයක් ගෙවා යන බව පෙන්වන්න.

03. P අංශුවක්, O නාභිය දෙසට වූ $\frac{\mu}{r^2}$ ආකර්ශණ බලයක් යටතේ විකේන්ද්‍රිකතාව e වූ ද අඩ මහා අක්ෂය a වූ ඉලිප්සයක් ගෙවායයි; මෙහි μ නියතයක් වන අතර $OP = r$ වේ. සුපුරුදු අංකනයෙන්, කේන්ද්‍රික කක්ෂයේ පාදික සමීකරණය $\frac{h^2}{p^3}\left(\frac{dp}{dr}\right) = \frac{\mu}{r^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඉලිප්සයේ පාදික සමීකරණය $\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$ බව උපකල්පනය කරමින්, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $h^2 = \mu l$ සහ $v^2 - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{a}$ සමීකරණ ලබා ගන්න; මෙහි v යනු $OP = r$ වන විට අංශුවේ ප්‍රවේගයද $l = \frac{b^2}{a}$ ද b යනු ඉලිප්සයේ අඩ සුළු අක්ෂයේ දිගද වේ.

P අංශුව අඩ මහා අක්ෂයේ O ට ආසන්න කෙළවරෙහි වූ විට එය නිසලතාවයේ ඇති සමාන අංශුවක් හමුවී එය සමඟ හා වෙයි. සංයුක්ත අංශුව, විකේන්ද්‍රිකතාව $\frac{3-e}{4}$ වූ ඉලිප්සයක් ගෙවා යන බව පෙන්වන්න.

04. එක එකෙහි ස්කන්ධය m වූ P හා Q අංශු දෙකක් ස්වාභාවික දිග a වූ ද ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය λ වූ ද සුමට සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක දෙකෙලවරට ඈඳා රළු තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. ආරම්භයේදී PQ මේස දාරයට ලම්බ හා $PQ = a$ වන ලෙස Q මේස දාරය අද්දර තබා ඇත. එය නිසලතාවයෙන් වැටෙන්නට සලස්වනු ලැබේ නම්, $\mu > 2$ නම් P කිසිවිටෙකත් චලනය නොවන බවද, $\mu = 1$ නම්, $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{am}{\lambda}}$ කාලයකට පසුව P චලනය වීමට පටන් ගන්නා බවද පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු මේසය සහා P අතර සර්ෂණ සංගුණකය වේ.

05. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් දිග l වූ ලුහු අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත. තන්තුව නොබුරුල් වන අතර OP යටිඅත් සිරස සමඟ $\alpha\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදන සේ නිසලව තබා ගෙන ඇත. අංශුවට u ප්‍රවේගයක් තිරස්ව දෙනු ලැබේ නම්, OP යටි අත් සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදන විට , සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$l^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2) - 2\lg\cos\theta = u^2 - 2\lg\cos\alpha$ හා $l\sin^2\theta\,\dot{\phi} = u\sin\alpha$
බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

එනයින් $l^2\dot{\theta}^2 = (\cos\alpha - \cos\theta)\left[\frac{u^2(\cos\alpha+\cos\theta)}{\sin^2\theta} - 2lg\right]$ බව පෙන්වන්න.

අංශුව සඳහා දෛශික චලිත සමීකරණය ලියා දක්වා, ඒනයින් අංශුවේ T ආතතිය
$T = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\alpha + \frac{mu^2}{l}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ගෝලීය ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක වලින් ත්වරණයේ අරීය සංරචකය $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2$බව උපකල්පනය කල හැකිය.)

$u^2 = 2\,lg\sec\alpha$ නම් $\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$ විට $T > 0$ බව පෙන්වා, එනයින් අංශුවට $\theta = \frac{\pi}{2}$ දක්වා යම්තමින් ඉහළ නැගිය හැකි බව පෙන්වන්න.

06. O එකම මූලය සහිත සමුද්දේශ රාමු දෙකක් එකිනෙක අනුබද්ධයෙන් $\underline{\omega}$ කෝණික ප්‍රවේගයෙන් භ්‍රමණය වේ. සුපුරුදු අංකනයෙන්, ඕනෑම $\underline{A}$ දෛශිකයක් සඳහා $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \underline{\omega}\times\underline{A}$ බව උපකල්පනය කරමින්, රාමු දෙකෙහිදී අංශුවෙහි ත්වරණ,

$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2\underline{r}}{\partial t^2} + \frac{\partial\underline{\omega}}{\partial t}\times\underline{r} + 2\underline{\omega}\times\frac{\partial\underline{r}}{\partial t} + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න, මෙහි $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ වේ.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, පෘථිවි පෘෂ්ඨය ආසන්නයේ අංශුවක චලිතය, $|\underline{\Omega}|^2$ පද නොසලකා හරිමින් $\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} + 2\underline{\Omega}\times\frac{\partial\underline{r}}{\partial t} = \underline{g}$ මගින් විස්තර කල හැකි බව පෙන්වන්න, මෙහි $\underline{\Omega}$ යනු පෘථිවියේ කෝණික ප්‍රවේගය වේ.

ඒනයින්, $\frac{\partial\underline{r}}{\partial t} + 2\underline{\Omega}\times\underline{r} = \underline{g}t + \underline{A}$ බව හා ඉහත සඳහන් විශාලත්ව ගණයට,
$\frac{\partial^2\underline{r}}{\partial t^2} + 2\underline{\Omega}\times\underline{g}t + 2\underline{\Omega}\times\underline{A} = \underline{g}$ සහ $\underline{r} = -\frac{\underline{\Omega}\times\underline{g}\,t^3}{3} - \underline{\Omega}\times\underline{A}\,t^2 + \frac{1}{2}\underline{g}t^2 + \underline{B}t + \underline{C}$
බව පෙන්වන්න, මෙහි $\underline{A}, \underline{B}$ සහ $\underline{C}$ නියත දෛශික වේ.

අංශුව $\lambda^0 N$ අක්ෂාංශයක වන අතර $t = 0$ කාලයෙහිදී, සුපුරුදු අංකනයෙන්, බිම $\underline{r} = (0,0,0)$ සිට $\underline{v} = v(0,\cos\alpha,\sin\alpha)$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපනය කෙරෙයි. $\underline{\Omega} = \Omega(0,\cos\lambda,\sin\lambda)$ හා $\underline{g} = (0,0,-g)$ වේ නම් $\underline{A} = \underline{B} = v(0,\cos\alpha,\sin\alpha)$ හා $\underline{D} = \underline{0}$ බව පෙන්වන්න.
අංශුව $\frac{2v\sin\alpha}{g}$ කාලයකට පසු බිමට පතිත වන බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

07. O ලක්ෂ්‍යයක් වටා අංශු පද්ධතියක $\underline{H}_0$ කෝණික ගම්‍යතාවය අර්ථ දක්වන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, O ඔස්සේ යන අක්ෂයක් වටා $\underline{\omega}$ කෝණික ප්‍රවේගයෙන් භ්‍රමණය වන දෘඩ වස්තුවක් සඳහා $\underline{H}_0 = \sum m_i\{r_i^2\underline{\omega} - (\underline{r}_i \cdot \underline{\omega})\underline{r}\}$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, O හිදී සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසීය අක්ෂ තුනක් දිගේ $\underline{H}_0$ හි H_x, H_y, H_y සංරචක

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න.

එනයින්, සාධාරණ වශයෙන් , $\underline{H}_0 = n\underline{\omega}$ වන පරිදි O හි අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් ලම්බ වූ අක්ෂ තුනක් ඇති බව පෙන්වන්න; මෙහි n යනු අදිශයකි. තවද, $\underline{H}_0 = n\underline{\omega}$ සමීකරණය සපුරාලන n_1, n_2, n_3 අගය තුන ඉහත සඳහනි අක්ෂ තුන වටා වස්තුවේ අවස්ථිති ඝූර් ණ බවද ඉහත සඳහන් අක්ෂ දෙක බැගින් ගත් කල ඒ අනුබද්ධයෙන් වස්තුවේ ගුණිතය ශූන්‍යය බවද පෙන්වන්න.

~~~~~~
~~~~~~