කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ද්විතීය පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2009/2010

(පාඨමාලා ඒකක ක්‍රමය)

2013 ජූලි / අගෝස්තු

විද්‍යා පීඨය

ව්‍යවහාරික ගණිතය - **AMAT E2025**

සංඛ්‍යාත්මක විශ්ලේෂණය

<u>ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.</u>

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 08 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 04 යි කාලය : පැය 03 යි.

ප්‍රකමනය කලහැකි ගණක යන්ත්‍ර භාවිතයට ඉඩදෙනු නොලැබේ.

---

1. (අ) සංඛ්‍යාත්මක විශ්ලේෂණයේ ස්ථායිතාව යන්නෙන් කුමක් අදහස් වන්නේද?

(ආ) E_a සහ E_b යනු පිළිවෙලින් a සහ b සංඛ්‍යාවල නිරපේක්ෂ දෝෂ යැයි ගනිමු. $\frac{E_b}{b} \ll 1$ යැයි උපකල්පනය කරමින් a/b හි නිරපේක්ෂ දෝෂය ආසන්නව $\frac{a}{b}\left(\frac{E_a}{a}-\frac{E_b}{b}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $f(x)=2x\cos(2x)-(x-2)^2$ යැයි ගනිමු.

(i) $x_0=0$ වටා තුන්වන ටේලර් බහුපදය $P_3(x)$ සොයා එය භාවිතයෙන් $f(0.4)$ සන්නිකර්ෂණය කරන්න.

(ii) $|f(0.4)-P_3(0.4)|$ දෝෂය සඳහා උඩත් පර්යන්තය සෙවීමට ටේලර් ප්‍රමේයයෙහි ඇති දෝෂ සූත්‍රය භාවිතා කරන්න.

2. (අ) (i) "අයෝග්‍ය තත්ත්වයේ ගැටළුවක්" යන පදය අර්ථ දක්වන්න.

(ii) අයෝග්‍ය තත්ත්වයේ ශුන්‍ය පවතින බහුපදයක් සඳහා උදාහරණයක් දෙන්න.

(ආ) $\begin{pmatrix} 0.96 & -1.23 \\ 4.91 & -6.29 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.27 \\ -1.38 \end{pmatrix}$ පද්ධතිය අයෝග්‍ය තත්ත්වයේ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) (i) ගවුසියානු ඉවත් කිරීමේ ක්‍රමය භාවිතයෙන් ඒකජ සමීකරණ පද්ධතියක් විසඳීමේදී විවර්තනිය උපායන් සැලකීමට හේතු දෙකක් දෙන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

(ii) විවර්තනිය සහිත ගවුසියානු ඉවත් කිරීමේ ක්‍රමය භාවිතයෙන් පහත ඒකජ සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

$$-2x_2 + 2x_3 = 4$$
$$x_1 - \quad 2x_2 + \quad x_3 = 3$$
$$-2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

3. (අ) ඕනෑම ධන නිඛිල n සඳහා $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ ලක්ෂයයන් $(n+1)$ සමග සහනිවේශනය වන නිව්ටන්ගේ ඉදිරි අන්තර සූත්‍රය

$$P_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \Delta^i y_0$$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ආ) ඉහත නිව්ටන්ගේ සූත්‍රයෙහි විකල්ප ආකෘතිය

$$P(x_k) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_k - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{n-1})$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මෙහි, $x_k = x_0 + kh, y_k = y(x_k), \Delta y_k = y_{k+1} - y_k, P(x_k) = P_k, k = 0,1,2,...,n$ ද, h අචලද වේ.

(ඇ) විභාගයකදී එක් එක් ලකුණු සීමාවන් ලබාගත් අපේක්ෂකයන් සංඛ්‍යාව පහත දක්වා ඇත.

ලබාගත් ලකුණු	අපේක්ෂකයන් සංඛ්‍යාව
00-19	41
20-39	62
40-59	65
60-79	50
80-99	17

ලකුණු 70ට අඩුවෙන් ලබාගත් අපේක්ෂකයින් සංඛ්‍යාව කොපමණද?

4. (අ) $y = f(x)$ ශ්‍රිතයෙහි $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ලක්ෂයයන්හිදී අගය දනී. ලග්රාන්ජ් අන්තර්නිවේශන බහුපදය $P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න;

මෙහි $$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$ වේ.

මතුසම්බන්ධයි...

(ආ) එක්තරා රටක සෑම අවුරුදු හයකට වරක් ජනසංගණනයක් සිදුකරනු ලැබේ. පහත වගුවේ දක්වා ඇත්තේ 1940 සිට 1990 දක්වා ජනගහණය වේ. (මෙය 1000න් ගුණ කල යුතුය.)

වසර	1940	1950	1960	1970
ජනගහණය (x1000)	132,165	151,326	179,323	203,302

ලග්රාන්ජ් අන්තර්නිවේශන බහුපදය භාවිතයෙන්, 1965 වසරේදී ජනගහණය ආසන්න වශයෙන් ගණනය කරන්න.

5. (i) $E^r, \delta, \nabla, \Delta$ යන කාරකයන් සුපුරුදු අංකනයෙන් පහත සඳහන් අයුරින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ; මෙහි $r = -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ වේ.

$$E^r y_k = y_{k+r}, \quad \delta y_k = E^{\frac{1}{2}} y_k - E^{-\frac{1}{2}} y_k, \quad \nabla y_k = y_k - y_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k.$$

පහත දැක්වෙන සම්බන්ධතාවය පිහිටුවන්න.

$$\nabla = \delta E^{-\frac{1}{2}} = 1 - E^{-1} = 1 - (1+\Delta)^{-1}$$

(ii) (අ) $P_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \Delta^i y_0$ නිව්ටන්ගේ ඉදිරි අන්තර සූත්‍රය භාවිතා කිරීමෙන් P_k හි පළමුවන සහ දෙවන ව්‍යුත්පන්නයන් සඳහා ප්‍රකාශණ ලබා ගන්න.

(ආ) පහත දී ඇති වගුව සැලකීමෙන් $x = 1.9$ දී $\frac{dy}{dx}$ සහ $\frac{d^2y}{dx^2}$ හි අගයයන් නිමානය කරන්න.

x	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
$Y(x)$	10.889365	12.703199	14.778112	17.148957	19.855030

(ඇ) $y = xe^x$ යනු ඉහත වගුගත කරන ලද ශ්‍රිතය නම්, ඔබගේ පිළිතුරෙහි විශ්වාසනීයත්වය විස්තර කරන්න.

6. මාත්‍රය එක වන අඩුතම වර්ග බහුපදය සඳහා ප්‍රමත සමීකරණය ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

කාලය t හිදී ද්‍රව්‍යයක විකිරණ ප්‍රමාණය $N(t)$, $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ මගින් දෙනු ලැබේ, මෙහි N_0 යනු ආරම්භක විකිරණ ප්‍රමාණයද, λ යනු නියතයක්ද වේ. පහත දැක්වෙන වගුවේ දත්තයන් සහ අඩුතම වර්ග ක්‍රමය භාවිතයෙන් N_0 සහ λ අගයයන් සොයන්න.

t(කාලය)	1	2	3	4	5	6
N	4887	3757	3923	2742	2655	2001

මතුසම්බන්ධයි...

7. (අ) $f(x) = 0$ හි මූලයක් සෙවීම සඳහා අචල ලක්‍ෂ්‍යය පුණ:කරණ ක්‍රමය විස්තර කරන්න.

(ආ) $x = g_1(x)$ ආකාරයට $f(x) = \sin(x^2) = 0$ ප්‍රකාශකල හැකි බව පෙන්වන්න, මෙහි $g_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2} + x$ වේ.

g_1 සඳහා $[1.70, 1.8]$ තුල අනන්‍යය අචල ලක්‍ෂ්‍යයක් පවතින බව පෙන්වීමට අචල ලක්‍ෂ්‍යය පුණ:කරණ ප්‍රමේයය භාවිතා කරන්න.

g_1 හි අචල ලක්‍ෂ්‍යයක් සෙවීම සඳහා අචල ලක්‍ෂ්‍යය පුණ:කරණ ක්‍රමය යොදන්න.

$x_0 = 2$ ලෙස ගනිමින් 10^{-4} ක බුරුලක් යොදන්න.

දැන් $g_1(x)$ යන්න $g_2(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} + x$ මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කරන්න.

g_2 සඳහා අචල ලක්‍ෂ්‍යයක් පැවතිය හැකිද? ඔබගේ පිළිතුර විස්තර කරන්න.

8. **(අ)** පහත සඳහන් ප්‍රකාශනයෙන් ඔබ අදහස් කරන්නේ කුමක්ද?

"$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha,$ යනු හොඳින් පිහිටුවන ලද ආරම්භක අගය ගැටළුවකි. "

(ආ) $\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ අවකල සමීකරණය විසඳීමට භාවිත කලහැකි ඔයිලර්ගේ නවීකෘත ක්‍රමය විස්තර කරන්න.

(ඇ) $\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad 0 \le x \le 0.4, \quad y(0) = -1$ ආරම්භක අගය ගැටළුව සලකන්න.

(i) $y(0.2)$ සෙවීම සඳහා පියවර දිග $h = 0.1$ ලෙස ගෙන ඔයිලර්ගේ නවීකෘත ක්‍රමය භාවිතා කරන්න.
එක් එක් පියවරේදී වූ ඔබගේ පිළිතුර තුන්වරක් ශෝධනය කිරීම අපේක්‍ෂා කෙරේ.

(ii) සම්මත විශ්ලේෂී ක්‍රමයක් භාවිතයෙන් ඉහත ගැටළුව විසඳීමෙන් ලැබෙන නියම අගය සමග **(i)** හිදී ලබාගත් අගය සසඳන්න.
(ඔබගේ සෑම පිළිතුරක් සඳහාම දශමස්ථාන හතරක නිරවද්‍යතාවයක් පැවැත්වීම අපේක්‍ෂා කෙරේ.)

----------------/////----------------