කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දූරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි තෙවන පරීක්ෂණය(බාහිර) –
2019/2011/2010

2024 - අගෝස්තු

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය - **PMAT E 2025** - අපරිමිත ශ්‍රේණි සහ සාමාන්‍ය අවකල සමීකරණ

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : අටයි (08)　　　　　　　　පිටු සංඛ්‍යාව: හතරයි (04)

කාලය: පැය (03)

---

1. (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ශ්‍රේණිය අභිසාරිවේ යැයි කීමෙන් අදහස් වෙන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

   (ii) $\sum a_n$ සහ $\sum b_n$ යනු අභිසාරී සහ අපසාරී වන පරිදි වූ ශ්‍රේණි දෙකක් යැයි ගනිමු.

   $\sum(a_n + b_n)$ අපසාරී වන බව පෙන්වන්න.

   (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^{n-1}}$ හි අගය සොයන්න.

   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ශ්‍රේණියේ n වන අංශික එකතුව $S_n = 3 - n\,2^{-n}$ නම් a_n සහ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ සොයන්න.

2. (i) $[1, \infty)$ මත අර්ථ දක්වා ඇති අනුරූප ශ්‍රිතයක් සහිත $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ අපරිමිත ශ්‍රේණියේ අභිසාරීතාවය සඳහා අනුකල පරීක්ෂාව පැහැදිලිව සඳහන් කරන්න.
   අනුකල පරීක්ෂාව භාවිතයෙන් $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$ අභිසාරී බව පෙන්වන්න.

   (ii) ඍජු හෝ සීමා සංසඳක පරීක්ෂාව භාවිතයෙන් $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{7n^5+n}$ ශ්‍රේණියේ අභිසාරීතාව පරීක්ෂා කරන්න.

   (iii) මූල පරීක්ෂාව භාවිතයෙන් $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n$ ශ්‍රේණියේ අභිසාරීතාව පරීක්ෂා කරන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

3. (i) $\sum a_n$ ශ්‍රේණියක් නිරපේක්ෂ ලෙස අභිසාරී සහ අසම්භාව්‍ය ලෙස අභිසාරී යනුවෙන් අදහස් කරන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

(ii) පහත ශ්‍රේණි නිරපේක්ෂ ලෙස අභිසාරීද අසම්භාව්‍ය ලෙස අභිසාරී ද හෝ අපසාරීදැයි නිර්ණය කරන්න.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n}}{n!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(7n)^{n}}{(5n+3n)^{n}}$

(iii) පහත ශ්‍රේණියෙහි අභිසාරිතා අරය සහ අභිසාරීතා ප්‍රාන්තරය සොයන්න.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n}}{3^{n}}$$

4. (i) ඔබ දන්නා ශ්‍රේණියක් භාවිතා කර $f(x)=\frac{2x}{(1-3x)^2}$ ශ්‍රිතය ශ්‍රේණියක් මගින් නිරූපනය කරන්න.

(ii) $f(x)=\tan^{-1}x$ ශ්‍රිතය සදහා මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණිය $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{2n+1}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) එනයින් $f(x)=\tan^{-1}x$ හි අගය $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)3^{n}}.$ බව පෙන්වන්න.

(iv) $\int\tan^{-1}(x^2)\,dx$ යන්න අපරිමිත ශ්‍රේණියක් මගින් නිරූපනය කරන්න.

5. $[-\pi,\pi]$ ප්‍රාන්තරය මත අර්ථ දක්වා ඇති කොටස් වශයෙන් සන්තතික $f(x)$ ශ්‍රිතයේ ෆුරියර් ශ්‍රේණිය $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, මගින් දෙනු ලැබේ. මෙහි $a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\ dx$, සහ $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\ dx.$ වේ.

(i) $[-L,L]$ ප්‍රාන්තරය මත අර්ථ දක්වා ඇති කොටස් වශයෙන් සන්තතික $f(x)$ ශ්‍රිතයේ ෆුරියර් ශ්‍රේණිය $A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]$ මගින් දෙනු ලැබේ නම් A_0, A_n and B_n සංගුණක වල අගයන් අපෝහනය කරන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

(ii) $f(x) = 1 - x^2, \quad -1 \leq x \leq 1$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ ශ්‍රිතයේ ෆූරියර් ශ්‍රේණිය සොයන්න.

6. (i) $x = e^t$ නම්, එවිට $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$ සහ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 10\left(x + \frac{1}{x}\right)$ හි විසඳුම සොයන්න.

(ii) පරාමිතික විචලන ක්‍රමය භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණයේ ව්‍යක්තික විසඳුම සොයන්න.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

7. (i) පහත අවකල සමීකරණ විසඳන්න.

(a) $(D^2 - 5D + 6)y = x^2e^{4x}$

(b) $(D^3 + 8)y = x^4 + 2x + 1$

(c) $(D^2 - 1)y = x^2 \cos x$

(ii) පහත සමගාමී අවකල සමීකරණ විසඳන්න.

$$\frac{dx}{dt} + x - y = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} + y - x = e^t$$

8. (i) $\frac{d^2y}{dx^2} + (x - 3)\frac{dy}{dx} + y = 0$ අවකල සමීකරණයේ $x = 2$ වටා බල ශ්‍රේණි විසඳුම සො යන්න.

(ii) $2x^2y'' - xy' + (1 - x^2)y = 0$ අවකල සමීකරණය සලකන්න.

(a) $x = 0$ යනු ඉහත අවකල සමීකරණයේ සවිධි අපූර්ව ලක්ෂ්‍යයක් බව පෙන්වන්න.

(b) දර්ශක සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

(c) $x = 0$ වටා අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

--------------------//////////-----------------