කැළණිය විශ්වවිද්‍යාලය-ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ හා අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි දෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2016 (නව නිර්දේශය)

2022 / මාර්තු

ශුද්ධ ගණිතය

අපරිමිත ශ්‍රේණි සහ සාමාන්‍ය අවකල සමීකරණ - PMAT E 2025

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : අටයි (08)   පිටු සංඛ්‍යාව : පහයි (05)   කාලය : පැය තුනයි (03)

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) $\sum_n a_n$ අභිසාරී ශ්‍රේණියක් යැයි ගනිමු. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ බව සාධනය කරන්න.
පහත ශ්‍රේණි අභිසාරී දැයි නිර්ණය කරන්න. ඔබේ පිළිතුරු සනාථ කරන්න.

(i) $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{3}{6}} + \sqrt{\frac{5}{9}} + \sqrt{\frac{7}{12}} + \sqrt{\frac{9}{15}} + \cdots$

(ii) $e + 2\sqrt{e} + 3\sqrt[3]{e} + 4\sqrt[4]{e} + \cdots$

(ආ) ශ්‍රේණියක අභිසාරිතාව සඳහා

(i) ඍජු සංසන්දන පරීක්ෂාව සහ

(ii) අනුකල පරීක්ෂාව

ප්‍රකාශ කරන්න.

(ඇ) ඔබ භාවිතා කරන ඕනෑම ප්‍රතිඵලයක් හෝ ප්‍රමේයයක් සඳහන් කරමින් පහත ශ්‍රේණි වල අභිසාරිතාවය පරීක්ෂා කරන්න.

i. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3ne^n}{n^2+1}$

ii. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n^2-3n+2}$

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+7}{n^4 \sin^2(n)}$

iv. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n(2^n+3^n)}$

මතුසම්බන්ධයි...

2. (i) නිරපේක්ෂ ලෙස අභිසාරී ශ්‍රේණියක් සහ

(ii) අසම්භාව්‍ය ලෙස අභිසාරී ශ්‍රේණියක්

යන්නෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

පහත ශ්‍රේණි වල නිරපේක්ෂ අභිසාරිතාවය සහ අසම්භාව්‍ය අභිසාරිතාවය සාකච්ඡා කරන්න.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n}}$

(ii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n^3+1}$

පහත ශ්‍රේණි වල අභිසාරිතා අරය සහ අභිසාරිතා ප්‍රාන්තරය නිර්ණය කරන්න.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n+1}}{4^{3n}} (2x+17)^n$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{1+2n}}{5^{n+1}} (x+3)^n$

3. (අ) (i) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ශ්‍රිතය සඳහා මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණිය සොයන්න.

(ii) $\arctan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $-1 \leq x \leq 1$ සඳහා ඉහත (ii) හි දැක්වෙන ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වන්න. එනයින්

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

බව පෙන්වන්න.

(ආ) බල ශ්‍රේණියක් භාවිතයෙන් $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ දශමස්ථාන 3 කට සන්නිකර්ෂණය කරන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

4. ආවර්තය 2π වූ $f(x)$ ශ්‍රිතය

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලැබේ.

(අ) $-2\pi < x < 2\pi$ ප්‍රාන්තරය තුල $f(x)$ ශ්‍රිතයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(ආ) $0 < x < 2\pi$ ප්‍රාන්තරය තුල $f(x)$ ශ්‍රිතයෙහි ෆුරියර් ශ්‍රේණිය,

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right] + \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots$$

බව පෙන්වන්න.

(ඇ) x සඳහා සුදුසු අගයක් තෝරා ගෙන,

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

බව පෙන්වන්න.

5. (අ) $x > 0$ සඳහා $z = \ln x$ යැයි ගනිමු.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \quad \text{සහ} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$$

බව පෙන්වන්න.

එනයින්,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2$$

අවකල සමීකරණයේ විසඳුම සොයන්න.

(ආ) පරාමිතික විචලන ක්‍රමය භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණයේ ව්‍යක්තික විසඳුම සොයන්න.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1 + \tan x$$

6. (අ) $y = 2$ යනු

$$\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$$

රිකාටි සමීකරණයේ විසඳුමක් බව පෙන්වා එනයින් අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(ආ) පහත දැක්වෙන ක්ලේරෝ අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම හා අපූර්ව විසඳුම සොයන්න;

$$y = xp + \sqrt{p^2 + 4}$$

මෙහි $p = \frac{dy}{dx}$ වේ.

7. (අ) සාමාන්‍ය අවකල සමීකරණයක අපූර්ව ලක්ෂ්‍යය වර්ගීකරණය කරමින් ඒවා කෙටියෙන් පැහැදිලි කරන්න.

පහත දී ඇති අවකල සමීකරණයෙහි, $x = 0$ සාමාන්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් (ordinary point) සහ $x = 1$ සවිධි අපූර්ව ලක්ෂ්‍යයක් (regular singular point) බව පෙන්වන්න.

$$(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$$

(ආ) ශ්‍රේණි විසඳුම් ක්‍රමය භාවිතයෙන් $x = 0$ වටා පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

$$(x^2 + 1)y'' + xy' - xy = 0.$$

මතුසම්බන්ධයි...

8. (අ) D –කාරකයෙහි ගුණ භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණ විසඳන්න.

i. $(D^5 - D)y = 12e^x + 8\sin x - 2x$

ii. $(D^2 - 1)y = xe^x + \cos^2 x$

iii. $(D^2 - 2D + 1)y = x\sin x$

(ආ) ලප්ලාස් පරිණාමන ක්‍රමය භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන අවකල සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

$$\frac{dx}{dt} + 2x - 3y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} - x + 2y = e^{-t}$$

****