කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ද්විතීය පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2009/2010 (පාඨමාලා ඒකක ක්‍රමය)
ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ද්විතීය පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2009 (පාඨමාලා ඒකක ක්‍රමය)

2013 ජූලි / අගෝස්තු

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය - **PMAT E2025**

අපරිමිති ශ්‍රේණි සහ සාමාන්‍ය අවකල සමීකරණ

<u>ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.</u>

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 08 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 04 යි කාලය : පැය 03 යි.

---

1. (අ) (i) "$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ" ප්‍රකාශනයෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ නම් එවිට $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ දැයි නිර්ණය කරන්න; මෙහි

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & n \text{ ඉරට්ටේ විට} \\ \dfrac{25}{n^2} & n \text{ ඔත්තේ විට} \end{cases} \quad \text{වේ.}$$

(ආ) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n$ අභිසාරී ශ්‍රේණියක් යැයි ගනිමු. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ අභිසාරී වේ යන්න අනිවාර්යයෙන්ම සත්‍ය වේද? ඔබගේ පිළිතුර සත්‍යාපනය කරන්න.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ සහ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ යනු සියලු n සඳහා $0 < u_n \le v_n$ වන පරිදි වූ ධන පද සහිත ශ්‍රේණි දෙකක් යැයි ගනිමු.

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ අභිසාරී වේ නම් එවිට $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

ඔබ භාවිතා කරන ඕනෑම ප්‍රතිඵලයක් පැහැදිලිව සඳහන් කරමින් , පහත ශ්‍රේණි වල අභිසාරීතාවය නිර්ණය කරන්න:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+2n+1}{10n^3+n-7}$ (ii) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{249}}$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

3. (අ) සියලු n සඳහා $u_n > 0$ වන $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ ඒකාන්තරණ ශ්‍රේණිය සඳහා ලයිබ්නිට්ස් පරීක්ෂාව සඳහන් කරන්න.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ ශ්‍රේණිය

(අ) අභිසාරී වන

(ආ) නිරපේක්ෂ ලෙස අභිසාරී වන

(ඇ) අසම්භාව්‍ය ලෙස අභිසාරී වන

p හි අගයයන් සොයන්න.

(ii) පහත එක් එක් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේද නිරපේක්ෂ ලෙස අභිසාරී වේද අසම්භාව්‍ය ලෙස අභිසාරී වේද යන වග නිර්ණය කරන්න:

(අ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^3}$ (ආ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+4}$.

(ආ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^k (x-5)^{2k}}{k^3}$ ශ්‍රේණියෙහි අභිසාරීතා ප්‍රාන්තරය සොයන්න.

4. (අ) $[-\pi,\pi]$හි සියලු x අගයයන් සඳහා k නිඛිලයක් නොවන විට

$\cos kx = \frac{\sin k\pi}{\pi}\left[\frac{1}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2k\cos nx}{k^2-n^2}\right]$ බව පෙන්වන්න.

(i) $k\cot k\pi = \frac{1}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k}{k^2-n^2}$.

(ii) $\frac{\pi}{\sin k\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+1-k}\right)$ බව අපෝහනය කරන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

(ආ) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ බව පෙන්වීමට $|x| < 1$ විට $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ යන්න භාවිතා කරන්න.

$\tan^{-1} x$ හි බල ශ්‍රේණි නිරූපනය සොයන්න.

එනයින් $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)}$ බව පෙන්වන්න.

5. (අ) x යන්න $x(x-1)\frac{dy}{dx} - (2x+1)y + y^2 + 2x = 0$ රිකාටි සමීකරණයෙහි ව්‍යක්තික විසඳුමක් නම්, එහි සාධාරණ විසඳුම $y = \frac{x^2+c}{x+c}$ වන බව පෙන්වන්න; මෙහි c යනු නියතයකි.

(ආ) $r(x)$ යනු මාත්‍රය n වන බහුපදයක් යැයිද b යනු නිශ්ශූන්‍ය නියතයක් යැයිද ගනිමු.

මාත්‍රය සැබැවින්ම n වන බහුපදයක් $y'' + ay' + by = r(x)$ හි විසඳුම ලෙස පවතින බව පෙන්වන්න.

එනයින් $y'' + 3y' + 2y = 9 + 2x - 2x^2$ හි විසඳුමක් ලබා ගන්න.

6. (අ) පරාමිති විචලන ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය මත $y'' + y = f(x)$ අවකල සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \int_a^x f(\xi)\, \sin(x-\xi)\, d\xi$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $f(x)$, $[a,b]$ මත සන්තතිකද වේ, ξ යනු $[a,b]$ හි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක්ද c_1 , c_2 අභිමත නියතද වේ.

එනයින් $[0,1]$ ප්‍රාන්තරය මත $y'' + y = e^x + 1$ විසඳන්න.

(ආ) $x > 0$ විට $\psi(x) = x^2$ යන්න $y'' - \frac{2}{x^2}y = 0$ අවකල සමීකරණයෙහි විසඳුමක් වන බව සත්‍යාපනය කරන්න .

මතු සම්බන්ධයි...

එනයින් $x > 0$ විට $y'' - \frac{2}{x^2}y = x$ විසඳන්න.

7. (අ) පහත අවකල සමීකරණයන්හි විසඳුම් සොයන්න:

(i) $(D^3 - D)y = 4e^{-x} + 3e^{2x}$; මෙහි $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ සහ $y''(0) = 2$ වේ.

(ii) $(D^2 - 4D + 4)y = x^2e^{2x}\sin 2x$.

(ආ) $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x}\sin x$ ආරම්භක අගීය ගැටළුව ලප්ලාස් ක්‍රමය භාවිතයෙන් විසඳන්න.

8. (අ) බල ශ්‍රේණි ක්‍රමය භාවිතයෙන් $(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න; මෙහි α යනු නියතයකි.

(ආ) $2xy'' + (x + 1)y' + 3y = 0$ අවකල සමීකරණය සලකන්න.

(i) $x = 0$ ඉහත අවකල සමීකරණයෙහි සවිධි අපූර්වතා ලක්ෂ්‍යයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) දර්ශක සමීකරණයෙහි මූල සොයන්න.

(iii) $x = 0$ වටා අවකල සමීකරණයෙහි විසඳුම සොයන්න.

__________//__________