කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දූරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ද්විතීය පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2009/2010 (පාඨමාලා ඒකක ක්‍රමය)

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ද්විතීය පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2009 (පාඨමාලා ඒකක ක්‍රමය)

2013 ජූලි / අගෝස්තු

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය - PMAT E2015

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 08 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 04 යි කාලය : පැය 03 යි.

---

1. (අ) $V \equiv \mathbb{R}^3$ යයි ගනිමු. පහත සඳහන් W කුලකයන් V හි උප අවකාශ බව පෙන්වන්න.

(i) $W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}$

(ii) $W = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

(ආ) (i) S යනු V දෛශික අවකාශයේ අභිශූන්‍ය නොවූ උපකුලකයක් නම්, එවිට S හි දෛශිකයන්ගේ සියළු ඒකජ සංයෝජනයන්ගෙන් සමන්විත W කුලකය V හි උප අවකාශයක් බව ද W යනු S අන්තර්ගත වන පරිදි වූ V හි කුඩාම උප අවකාශය වන බව ද පෙන්වන්න.

(ii) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ සහ $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ නම් එවිට $\{M_1, M_2, M_3\}$ මගින් ජනනය වන අවකාශය සියළු 2×2 සමමිතික න්‍යාසයන්ගෙන් සමන්විත කුලකය බව පෙන්වන්න.

(ඇ) (i) $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) := \{at^3 + bt^2 + ct + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ දෛශික අවකාශය සලකන්න. පහත දෛශික කුලකය $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ තුළ ඒකජ ලෙස ස්වායත්ත වන බව පෙන්වන්න.

$\{t^3 - 3t^2 + 5t + 1, t^3 - t^2 + 8t + 2, 2t^3 - 4t^2 + 9t + 5\}$

(ii) $\underline{u}, \underline{v}$ හා $\underline{w}$ යනු ඒකජ ලෙස ස්වායත්ත දෛශික නම්, $\underline{u} + \underline{v} - 2\underline{w}$, $\underline{u} - \underline{v} - \underline{w}$ සහ $\underline{u} + \underline{w}$ ද ඒකජ ලෙස ස්වායත්ත වන බව පෙන්වන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

2. (අ) V යනු දෛශික අවකාශයක් ද, $\beta = \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \cdots, \underline{x}_n\}$ යනු V සඳහා වූ පදනමක් ද යයි ගනිමු. V හි වූ එක් එක් $\underline{y}$ දෛශිකය, β හි වූ දෛශිකයන්ගේ ඒකජ සංයෝජනයක් ලෙස අනන්‍යව ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න.

(ආ) $V_4^{col}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ දෛශික අවකාශය සලකන්න. U යනු

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$ මගින් පරායනය කරන $V_4^{col}(\mathbb{R})$ හි උප

අවකාශයක් යයි ගනිමු.

(i) U සඳහා පදනමක් ද

(ii) ඉහත (i) හි වූ පදනම අන්තර්ගත වන පරිදි $V_4^{col}(\mathbb{R})$ සඳහා පදනමක් ද සොයන්න.

(ඇ) පහත ඒකජ සමීකරණ පද්ධතියේ විසඳුම් අවකාශය සඳහා පදනමක් සොයන්න.

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z - w + 3t &= 0 \\ x + 2y + 3z + w + t &= 0 \\ 3x + 6y + 8z + w + 5t &= 0 \end{aligned}$$

3. $V_4^{col}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ දෛශික අවකාශය සලකන්න.

$T: V_4^{col} \to V_4^{col}(\mathbb{R})$ යනු $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ මගින් අර්ථ දැක්වුන

ඒකජ කාරකයක් යයි ගනිමු.

මතුසම්බන්ධයි...

(i) $Ker(T)$ සඳහා පදනමක් සොයා එනයින් $\dim(Ker(T))$ සොයන්න

(ii) ඉහත (i) හි පදනම $V_4^{col}(\mathbb{R})$ හි පදනමක් දක්වා දීර්ඝ කරන්න.

(iii) ඉහත (ii) හි දීර්ඝ කරන ලද පදනම මගින් $Im(T)$ සඳහා පදනමක් සොයන්න.

(iv) $\dim(Im(T))$ සොයන්න.

(v) $dim(V_4^{col}) = dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$ සූත්‍රය සත්‍යාපනය කරන්න.

4. α සහ β යනු V පරිමිත මාන දෛශික අවකාශයක් සඳහා වූ පදනම් ද, $T: V \to V$ යනු ඒකජ කාරකයක් යයි ද සිතමු.

(i) $[T]_\beta [\underline{u}]_\beta = [T(\underline{u})]_\beta \quad \forall \underline{u} \in V$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) P යනු α පදනමේ සිට β පදනම දක්වා වූ සංක්‍රාම්‍ය න්‍යාසය නම්

$[\underline{u}]_\beta = P^{-1}[\underline{u}]_\alpha \quad \forall \underline{u} \in V$ බව සාධනය කරන්න.

(iii) ඉහත (i) සහ (ii) හි වූ සූත්‍ර භාවිතයෙන් $[T]_\beta = P^{-1}[T]_\alpha P$ බව පෙන්වන්න.

(iv) $V \equiv \mathbb{R}^3$, α යනු $\mathbb{R}^3$ සඳහා වූ සම්මත පදනම ද සහ , $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ මගින් T අර්ථ දක්වන ලද්දේ නම් ද ඉහත (i),(ii) සහ (iii) හි ප්‍රතිඵල සත්‍යාපනය කරන්න.

මෙහි $\beta = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ වේ.

5. (i) කේලි-හැමිල්ටන් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය සඳහා කේලි-හැමිල්ටන් ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කරන්න. එනයින් A^{-1} සොයන්න.

(ආ) $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ න්‍යාසය සඳහා අයිගන් අගයයන් සහ අනුරූප අයිගන් දෛශික සොයන්න.

$P^{-1}BP$ විකර්ණ න්‍යාසයක් වන පරිදි P නම් ප්‍රත්‍යාවර්ත න්‍යාසයක් ද සොයන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

6. (අ) $(V <\circ, \circ>)$ යනු අන්තඃ ගුණිත අවකාශයක් යයි ගනිමු.

(i) කෝෂී-ස්වාස් අසමානතාවය සාධනය කරන්න:

$$< \underline{u}, \underline{v} >^2 \leq < \underline{u}, \underline{u} >< \underline{v}, \underline{v} > \quad \forall \underline{u}, \underline{v} \in V$$

(ii) $(V, <\circ, \circ>)$ හි ප්‍රලම්භතාවය අර්ථ දක්වා පයිතගරස් ප්‍රමේයය සාධනය කරන්න: $\underline{u}$ හා $\underline{v}$ යනු V හි වූ ප්‍රලම්භ දෛශික නම් එවිට

$$\|\underline{v} + \underline{u}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{u}\|^2.$$

(ආ) $\alpha = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ යනු සම්මත අන්තඃ ගුණිතය සමග $\mathbb{R}^3$ සඳහා වූ පදනමක් යයි ගනිමු. Gram-Schmidt ප්‍රලම්භීකරණ ක්‍රියාවලිය භාවිතයෙන් α පදනම ප්‍රාභිලම්භ පදනමකට වෙනස් කරන්න.

7. (අ) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ සහ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ යයි ගනිමු. A සහ B ට වෙනස් ලාක්ෂණික බහුපද ඇති නමුත් එකම අවම බහුපදය ඇති බව පෙන්වන්න.

(ආ) $\Delta(t)$ ලාක්ෂණික බහුපදය සහ $m(t)$ අවම බහුපදය $\Delta(t) = (t-2)^7$, $m(t) = (t-2)^3$ මගින් දෙනු ලබන න්‍යාසය සඳහා විය හැකි සියළු ජෝර්ඩන් සෞත්‍රික ආකාර සොයන්න.

8. පහත ඒකජ අවකල සමීකරණ පද්ධතියේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(i) $x_1' = 4x_1 + x_2 + 4x_3$

(ii) $x_2' = x_1 + 7x_2 + x_3$

(iii) $x_3' = 4x_1 + x_2 + 4x_3$

(ii) $x''' - x'' - 4x' + 4x = 0$ හි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

[මෙහි " $'$ " මගින් අවකලනය දැක්වේ]

__________//__________