කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය -ශ්‍රී ලංකාව

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) තෙවන උපාධි පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2019
අගෝස්තු -2024
ව්‍යවහාරික ගණිතය
AMAT E 2025 (R) - සංඛ්‍යාත්මක විශ්ලේෂණය

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව: අටයි (08) පිටු සංඛ්‍යාව: හතරයි (04)

නියමිත කාලය: පැය තුනයි (03)

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

ප්‍රකමනය කලහැකි ගණක යන්ත්‍ර භාවිතයට ඉඩදෙනු නොලැබේ

---

1. (අ) $P_1 = \sum_{i=1}^{6} i^{-2}$ සහ $P_2 = \sum_{i=1}^{6} (7-i)^{-2}$ ගණනය කිරීම සඳහා සාර්ථාංක තුනේ කපාහැරීමේ අංක ගණිතය භාවිතා කරනු ලැබේ. $|P_1 - P_2|$ සොයන්න.

   (ආ) ප්‍රතිලෝම ටැන්ජන ශ්‍රිතය සඳහා මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණිය සියළු x අගයයන් සඳහා අභිසාරී වන අතර එය $\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$ මගින් දෙනු ලැබේ.

   (i) $|4\arctan 1 - \pi| < 10^{-3}$ වීම සහතික කිරීම සඳහා ශ්‍රේණියෙහි ආකලනය කල යුතු පද ප්‍රමාණය නිර්ණය කරන්න.

   (ii) FORTRAN ප්‍රක්‍රමණ භාෂාවට π හි අගය 10^{-7}ක් තුල නිරවද්‍යතාවක් අවශ්‍ය වේ. මෙම නිරවද්‍යතා ප්‍රමාණය ලබාගැනීම සඳහා මෙම ශ්‍රේණියෙහි කොපමණ පද ප්‍රමාණයක් ආකලනය කල යුතුද?

2. (අ) $f(x) = 0$ හි මූලයක් සෙවීම සඳහා වූ අචල ලක්ෂ්‍යය පුනඃකරණ ක්‍රමය විස්තර කරන්න.

   (ආ) g යනු $[a,b]$ තුල සන්තතික වූත් සියළු $x \in (a,b)$ සඳහා $|g'(x)| \le k < 1$ සහ සියළු $x \in [a,b]$ සඳහා $g(x) \in [a,b]$ වන පරිදි වූත් ශ්‍රිතයක් නම්, එවිට ඕනෑම $p_0 \in [a,b]$ සංඛ්‍යාවක් සඳහා $p_n = g(p_{n-1}),\ n \ge 1$ මගින් අර්ථ දැක්වුනු ලබන අනුක්‍රමය $[a,b]$ තුල වූ p නම් අනන්‍ය අචල ලක්ෂ්‍යයට අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

(ඇ) $[1,2]$ තුල $2\sin(\pi x)+x=0$ හි විසඳුමක් 10^{-2} ක නිරවද්‍යතාවයකට නිර්ණය කිරීම සඳහා අචල ලක්ෂ්‍යය පුන:කරණ ක්‍රමය යොදා ගන්න. $p_0=1$ යොදා ගන්න.

3. (අ) $f(x)=0$ විසඳීම සඳහා $p_n = p_{n-1} - \dfrac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} - \dfrac{f''(p_{n-1})}{2f'(p_{n-1})}\left[\dfrac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}\right]^2$

මගින් දෙනු ලබන පුන:කරණ ක්‍රමය සාධාරන වශයෙන් ඝනජ අභිසාරිතාවක් ලබාදෙන බව පෙන්වන්න, මෙහි $n=1,2,3,\ldots,$.

(ආ) $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ සහ $\{\tilde{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ යනු පිළිවෙළින් p ට සහ $\tilde{p}$ ට අභිසාරී වන අනුක්‍රමයැයි සිතමු.

එසේම $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|p_{n+1}-p|}{|p_n-p|}=0.75$ සහ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|\tilde{p}_{n+1}-\tilde{p}|}{|\tilde{p}_n-\tilde{p}|^2}=0.75$ යැයි උපකල්පනය කරමු.

$|p_0-p|=|\tilde{p}_0-\tilde{p}|=0.5$ යැයි උපකල්පනය කරමින්, 10^{-8} නොඉක්මවන දෝෂයක් ලබාගැනීම සඳහා අවශ්‍ය n හි අවම අගය නිර්ණය කරන්න.

4. රෝගියකුට ඖෂධයකින් ඒකක A ප්‍රමාණයක් ශරීරගත කර පැය t කාලයකට පසු $c(t)=Ate^{-t/3}\ mg\,ml^{-1}$ මගින් දෙනුලබන සාන්ද්‍රතාවක් රුධිර ප්‍රවාහයේ ඇතිකෙරේ. උපරිම ආරක්ෂාකාරී සාන්ද්‍රතාව $1\,mg\,ml^{-1}$ වේ.

(අ) මෙම උපරිම ආරක්ෂාකාරී සාන්ද්‍රතාවට ළඟාවීම සඳහා කොපමණ ඖෂධ ප්‍රමාණයක් එන්නත් කලයුතුද? එම උපරිමය ඇතිවන්නේ කොපමණ කාලයකින්ද?

(ආ) සාන්ද්‍රතාව $0.25\,mg\,ml^{-1}$ දක්වා පහත වැටුන පසු අමතර ඖෂධ ප්‍රමාණයක් ශරීරගත කල යුතුය. නිව්ටන්-රැප්සන් ක්‍රමය භාවිතාකර, පළමු එන්නත ලබාදීමෙන් කිනම් කාලයකට පසුව දෙවන එන්නත ලබාදිය යුතුදැයි ආසන්න මිනිත්තුවට නිර්ණය කරන්න.

5. (අ) (i) සුපුරුදු අංකනයෙන් ඕනෑම n ධන නිඛිල සඳහා $(x_{-n},y_{-n}),(x_{-n+1},y_{-n+1}),\ldots,(x_0,y_0)$ ලක්ෂ්‍ය $(n+1)$ සමඟ සහනිවේශණය වන නිව්ටන්ගේ ප්‍රතිප අන්තර සූත්‍රය

$$P_k = y_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{k(k+1)\ldots(k+i-1)}{i!}\nabla^i y_0$$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

(ii) 1928 අප්‍රේල් 1 දින සඳහා පැයෙන් පැයට ලබාගත් සඳෙහි ක්‍රාන්තිය පහත දැක්වෙන වගුවෙන් දෙනුලැබේ. එදින පැය 3යි මිනිත්තු 37යි තත්පර 10 දී සඳෙහි ක්‍රාන්තිය සොයන්න.

පැය	ක්‍රාන්තිය
0	$8^{0}\ 29'53.7''$
1	$8^{0}\ 18'19.4''$
2	$8^{0}\ 06'43.5''$
3	$7^{0}\ 55'06.1''$
4	$7^{0}\ 43'27.2''$

(ආ) පහත සඳහන් වගුවෙහි නොදැක්වෙන අගයයන් සොයන්න.

k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
0	0			
		—		
1	—		—	
		—		1
2	0		—	
		—		5
3	—		—	
		—		
4	0			

6. (අ) ගවුසියානු ඉවත්කිරීමේ ක්‍රමය සහ

(ආ) ආරම්භක සන්නිකර්ෂණය $(1,1,1)$ ලෙස ගෙන ගවුස්-සීඩ්ල් ක්‍රමය (පුනඃකරණ තුනක් සිදුකරන්න)
යොදාගනිමින් පහත සඳහන් සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

$$\begin{aligned} 10x - y - z &= 13 \\ x + 10y + z &= 36 \\ -x - y + 10z &= 35 \end{aligned}$$

මතුසම්බන්ධයි...

7. (අ) පහත සඳහන් ප්‍රකාශනයෙන් ඔබ අදහස් කරන්නේ කුමක්ද?

"$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha,$ යනු හොඳින් පිහිටුවන ලද ආරම්භක අගය ගැටළුවකි."

(ආ) $\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ අවකල සමීකරණය විසඳීම සඳහා වූ නවීකෘත ඔයිලර් ක්‍රමය විස්තර කරන්න.

(ඇ) $\frac{dy}{dx} = x^2 + y, \; y(0) = 1$ අවකල සමීකරණයෙහි $y(0.1)$ සෙවීමට පියවර දිග 0.05 සහිතව නවීකෘත ඔයිලර් ක්‍රමය භාවිතා කරන්න.

එක් එක් පියවරේදි වූ ඔබගේ පිළිතුර තුන්වරක් ශෝධනය කිරීම අපේක්ෂා කෙරේ. (ඔබගේ පිළිතුරුවල දශමස්ථාන හතරක නිරවද්‍යතාවයක් පැවැත්වීම අපේක්ෂා කෙරේ.)

8. $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \; (x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n)$ සඳහා n වැනි මාත්‍රයේ $P(x)$ බහුපදය $y(x)$ ශ්‍රිතයෙහි අගයයන්ම ගනී.

(i) සුපුරුදු අංකනයෙන් $y(x)$ සහ $P(x)$ අතර අන්තරය සඳහා, නිම්තියක් $\frac{y^{(n+1)}(\xi)\prod(x)}{(n+1)!}$, මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න, මෙහි $\xi \in (x_0, x_n)$.

(ii) $y(x)$ ශ්‍රිතය පහත වගුවෙන් දෙනු ලබන අගයයන් ගනී.

x_k	0	1	2	3
y_k	2	1	0	1

(iii) $y(x)$ සන්නිකර්ෂණය කරනු ලබන බහුපදය ලබාගන්න.

(iv) $y(x) = 1 + \cos(\frac{\pi x}{2})$ යැයි දී ඇත්නම් ඔබ ලබාගත් බහුපදයේ නිරවද්‍යතාවය නිමානය කරන්න.

(v) $x = 3/2$ දී නිම්තිය ආගනනය කර එය නියම දෝෂය සමඟ සසඳන්න.

-------------- Θ Θ Θ Θ Θ --------------