කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ද්විතීය පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2016 (නව නිර්දේශය)

2022 පෙබරවාරි

විද්‍යා පීඨය

ව්‍යවහාරික ගණිතය

AMAT E 2025 - සංඛ්‍යාත්මක විශ්ලේෂණය

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 08 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 04 යි. කාලය : පැය 3 යි.

---

1. (අ) වැටයුම් දෝෂ අවම කර ගැනීම සඳහා වූ උපාය මාර්ග හතරක් සැකෙවින් විස්තර කරන්න.

(ආ) $x-1$මගින් $p(x)=x^3-x^2+x-1$ බෙදීම සඳහා සංස්ලේෂ බෙදීම යොදන්න. ලබ්ධිය කුමක් ද? $p(7)$ ගණනය කරන්න.

(ඇ) yපද මගින් $\Delta^3 y_0$ සහ $\Delta^4 y_0$ ප්‍රකාශ කරන්න.

(ඇ) මෙම වගුවෙහි හිස්තැන් පුරවන්න.

y_k	0		....		....		....		0
Δy_k		....		....		....		....	
$\Delta^2 y_k$			0		-2		0		

(ඉ) $f(x)=e^{-x}$යැයි ගනිමු. $x_0=1$ වටා ප්‍රසාරණය කරන ලද තෙවන ටේලර් බහුපදය සොයා ටේලර් බහුපදය භාවිතයෙන් $e^{-0.99}$සන්නිකර්ෂණය කරන්න.
$|$ ලෝප දෝෂය $| < 5\times10^{-10}$බව පෙන්වන්න.

2. (අ) (i) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ශ්‍රිතය ලිප්ෂිට්ස් නියතය L සමඟ ලිප්ෂිට්ස් නියමය තෘප්ත කරන්නේ යැයි කීමෙන් අදහස් කරන්නේ කුමක් ද?

(ii) $[a,b]$ප්‍රාන්තරය මත Lමගින් සපර්යන්ත f ශ්‍රිතයට ව්‍යුත්පන්නයක් තිබේ නම්, එවිට fශ්‍රිතය ලිප්ෂිට්ස් නියතය L සමඟ ලිප්ෂිට්ස් නියමය තෘප්ත කරනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

(ආ) (i) π ගණනය කිරීම සඳහා වූ සූත්‍රයක්

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

යන සර්වසාම්‍යයෙන් අපෝහනය කල හැක. 10^{-3} ක නිරවද්‍යතාවයකට π සන්නිකර්ෂණය කිරීම සඳහා එකතු කල යුතු පද ගණන නිර්ණය කරන්න.

(ii) එක් එක් නිඛිලය $n \geq 1$ සඳහා $\{\alpha_n\}$ සහ $\{\beta_n\}$ අනුක්‍රම $\alpha_n = \frac{n+1}{n}$ සහ $\beta_n = \frac{n+3}{n^3}$ මගින් විස්තර කරන්නේ යැයි සිතමු.$\{\alpha_n\}$ අනුක්‍රමය බිංදුවට අභිසාරී වීමේ ශීඝ්‍රතාවය $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ බිංදුවට අභිසාරී වීමට සමාන වන අතරේදී $\{\beta_n\}$ බිංදුවට අභිසාරීවීම වඩාත් වේගයෙන් $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ අභිසාරී වීමට සමාන බව පෙන්වන්න.

3. (අ) $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය තුල වූ $f(x) = 0$ ආකාරයේ රේඛීය නොවන සමීකරණයක ආසන්න විසඳුම සමච්ඡේදන ක්‍රමය මගින් සොයන ආකාරය සැකෙවින් විස්තර කරන්න.

(ආ) $f \in C[a,b]$ සහ $f(a) \cdot f(b) < 0$ යැයි ගනිමු. p යනු $[a,b]$ තුල ඇති f හි මූලය යැයිද $\{p_n\}$ යනු සමච්ඡේදන ක්‍රමය මගින් ජනනය වන p ට සන්නිකර්ෂණය කර ලබා ගත් ශ්‍රේණියක් යැයිද ගනිමු.

$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}, n \geq 1$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $[1,2]$ ප්‍රාන්තරය තුල පවතින $x^3 - x - 1 = 0$ හි විසඳුමක් 10^{-2} ක නිවරද්‍යතාවයකට සන්නිකර්ෂණය කිරීමට අවශ්‍ය පියවර සංඛ්‍යාව සඳහා පර්යන්තයක් ලබා ගැනීමට ඉහත (ආ) භාවිතා කරන්න.

මෙම නිරවද්‍යතාවය සහිත මූලය සෙවීමට සමච්ඡේදන ක්‍රමය භාවිතා කරන්න.

4. (අ) ඕනෑම n ධන නිඛිලයක් සඳහා $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ ලක්ෂ්‍යයන් $(n+1)$ සමඟ සඟනිවේශණය වන නිව්ටන්ගේ ඉදිරි අන්තර සූත්‍රය $P_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \Delta^i y_0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ආ) ඉහත නිව්ටන්ගේ සූත්‍රයෙහි විකල්ප ආකෘතිය ලබාගන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

(ඇ) $y = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$ ශ්‍රිතයෙහි අගයයන් පහත වගුවෙන් දෙනු ලැබේ.

x	0.30	0.32	0.34	0.36	0.38	0.40
y	0.6179114	0.6255158	0.6330717	0.6405764	0.6480273	0.6554217

$y(0.316)$ ගණනය කිරීම සඳහා නිව්ටන්ගේ ඉදිරි අන්තර සූත්‍රය භාවිතා කරන්න.

5. (අ) (i) $f(x) = 0$, ඒකජ නොවන වර්ගයේ සමීකරණ වල ආසන්න විසඳුම් සෙවීම සඳහා නිව්ටන් - රැප්සන් සූත්‍රය ටේලර් බහුපදය භාවිතයෙන් ලබාගන්න.

(ii) $f(x) = x^3 - 8x^2 - 200x + 100$ හි උපරිම අගය නිමේශනය කිරීම සඳහා නිව්ටන් - රැප්සන් ක්‍රමය භාවිතා කරන්න. $x_0 = -6$ ලෙස ගෙන පියවර පහක් ක්‍රියාවට නංවන්න.

(ආ) Δ සහ E යන කාරකයන් පහත සඳහන් අයුරින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ. මෙහි h යනු ප්‍රාන්තර අන්තරය වේ.

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, $Ef(x) = f(x+h)$.

(i) $\Delta^n \sin(a+bx) = (2sin\frac{b}{2})^n \sin[a + bx + \frac{n}{2}(b+\pi)]$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\frac{\Delta^2}{E}\sin(x+h) + \frac{\Delta^2 \sin(x+h)}{E\sin(x+h)}$ අගයන්න.

6. (අ) $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ අවකල සමීකරණය විසඳීමට යෙදිය හැකි දෙවන ගණයේ රැන්ගේ-කුට්ටා ක්‍රමය විස්තර කරන්න.

(ආ) සාමාන්‍ය අවකල සමීකරණ විසඳීමේදී ටේලර් ක්‍රමයට වඩා රැන්ගේ-කුට්ටා සමීකරණවල වාසිය කුමක්ද?

(ඇ) $\frac{dy}{dx} = y - x$ අවකල සමීකරණයෙහි $x=0$ විට $y=2$ යැයි දී ඇත්නම්, දෙවන ගණයේ රැන්ගේ-කුට්ටා ක්‍රමය භාවිත කොට $x=0.2$ සහ $x=0.4$ විට y හි අගය සොයන්න. පියවර දිග $h=0.1$ ලෙස ගන්න.

(ඈ) ඉහත අවකල සමීකරණයෙහි විශ්ලේෂී විසඳුම $y = x + 1 + e^x$ බව පෙන්වන්න. $x=0.2$ දී සහ $x=0.4$ දී නිවැරදි විසඳුම සොයා, ඒවා ඉහත (ඇ) ප්‍රතිඵල සමග සසඳන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

7. (අ) ඔයිලර්ගේ නවීකෘත සූත්‍රය $y_{k+1} \approx y_k + \frac{1}{2}h(y'_k + y'_{k+1})$ සහ එහි ස්ථානීය ලෝප දෝෂය ලබා ගන්න.

(ආ) $y(1.05)$ සෙවීමට $y' = \sqrt[3]{y}\,x, \quad y(1) = 1$ ගැටළුවට ඔයිලර්ගේ නවීකෘත සූත්‍රය යොදන්න. (පියවර දිග $h=0.05$ ලෙස ගන්න.)

(ඇ) පුරෝකථක සූත්‍රය $y_{k+1} \approx y_{k-3} + \frac{4}{3}h\,(2\,y'_{k-2} - y'_{k-1} + 2\,y'_k)$ හි ස්ථානීය ලෝප දෝෂය (E_p) සොයන්න.

(ඈ) නිවැරදිකුරුව සූත්‍රය $y_{k+1} \approx y_{k-1} + \frac{1}{3}h\,(y'_{k-1} + 4\,y'_k + y'_{k+1})$ යැයිද අනුරූප ස්ථානීය ලෝප දෝෂය E_c යැයිද ගනිමු. $E_p = -28\,E_c$ බව පෙන්වන්න.

8. (අ) අඩුතම වර්ග මූලධර්මය යනු කුමක්ද?

(ආ) මාත්‍රය එක වන අඩුතම වර්ග බහුපදය සඳහා ප්‍රමත සමීකරණ ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

(ඇ) පහත සඳහන් දත්ත සඳහා $y = a\,x^b$ ආකාරයේ ශ්‍රිතයක් අනුසිහුම කරන්න.

x	2	4	7	10	20	40	60	80
y	43	25	18	13	8	5	3	2

.... ΘΘΘΘ ....