කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දූරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ද්විතීය පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2009/2010 (පාඨමාලා ඒකක ක්‍රමය)
2013 ජූලි / අගෝස්තු

විද්‍යා පීඨය

ව්‍යවහාරික ගණිතය - **AMAT E2015**

<u>ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.</u>

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 08 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 04 යි කාලය : පැය 03 යි.

---

1. සුපුරුදු අංකනයෙන්, පරිකල්‍ය පද්ධතියක් සඳහා $\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\right) = \hat{Q}_j$ සමීකරණ ලබා ගන්න.

AB, BC සහ CD යනු සමචතුරස්‍රයක පාද තුනක් සෑදෙන ආකාරයෙන් නිදහසේ සවි කර ඇති සමාන දඬු තුනකි. දඬු සුමට තිරස් මේසයක් මත ඇත . A කෙලවර මේසයට අසවි කර ඇත .D කෙලවරට AD දිශාව ඔස්සේ ආවේගයක් ලැබේ නම් දඬු වල ආරම්භක කෝණික ප්‍රවේග $1:0:11$ අනුපාතයෙන් වන බව පෙන්වන්න.

2. සුපුරුදු අංකනයෙන්, පරිකල්‍ය පද්ධතියක් සඳහා $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \, , \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$ හැමිල්ටන් සමීකරණ ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

අචල O ලක්ෂ්‍යයකට q දුරකින් වූ ස්කන්ධය m අංශුවක් O වෙතට වන දිශාව ඔස්සේ kq බලයකින් ආකර්ශනය වේ. මෙහි k යනු නියතයකි.

පද්ධතියෙහි H හැමිල්ටෝනියානුව $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

හැමිල්ටන් චලිත සමීකරණ ලබා ගෙන t කාලයෙහිදී $q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$ වන බව පෙන්වන්න; මෙහි E යනු පද්ධතියෙහි ශක්තිය, $\omega^2 = \frac{k}{m}$ සහ α නියතයක් වේ.

3. පරිකල්‍ය පද්ධතියක් යනුවෙන් අදහස් කරන්නේ කුමක්දැයි පැහැදිලි කරන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, පරිකල්‍ය පද්ධතියක් සඳහා වන $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$ සමීකරණ භාවිතයෙන් පරිකල්‍ය සංස්ථිතික පද්ධතියක් සඳහා ලග්රාන්ජ් චලිත සමීකරණ ව්‍යුත්පන්න කරන්න.

දිග $2a$ සහ ස්කන්ධය m වන ඒකාකාර දණ්ඩක එක් අග්‍රයක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සුමටව අසවි කර ඇත . දණ්ඩ යටි අත් සිරස වන OZ සමඟ θ කෝණයක් සාදන අතර

AOZ තලය අචල සිරස් තලයක් සමඟ ϕ කෝණයක් සාදයි . ස්කන්ධය λm වන පබළුවක් සුමට දණ්ඩ මත ලිස්සා යන අතර එය මාපාංකය nmg සහ ස්වාභාවික දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් O ට සම්බන්ධව ඇත .

පද්ධතියෙහි T චාලක ශක්තිය

$$2T = \frac{4}{3}ma^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \lambda m(\dot{x}^2 + x^2\dot{\theta}^2 + x^2\dot{\phi}^2 \sin^2\theta)$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි x යනු තන්තුවෙහි ඇදි දිග වේ.

චලිත සමීකරණ ලබා ගන්න.

$\theta = \frac{\pi}{3}$ සහ $x = \frac{4a}{3}$ සමඟ සතත චලිතයක් ලබා ගත හැකි නම් එවිට $\dot{\phi}^2 = \frac{3g}{2a}$ සහ $n = 6\lambda$ වන බව පෙන්වන්න.

4. අරය a වන ඒකාකාර ඝන ගෝලයක් අරය b වන පිටත පෘෂ්ඨය පූර්ණ රළු වූ ගෝලයක් මත පෙරලෙයි. චලිත සමීකරණ සකස් කර චලිත වන ගෝලයට අචල ගෝලයෙහි උච්චතම ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශව තිබියදී එහි බැමුම $\left[\frac{35g(a+b)}{a^2}\right]^{1/2}$ ඉක්මවන්නේ නම් ස්ථායි ලෙස බැමිය හැකි බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

5. හැමිල්ටන් මූලධර්මය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ස්කන්ධය ඒකක එකක් වූ අංශුවක් F නියත බලයක් යටතේ OX රේඛාවේ දිගේ චලනය වේ. $t = 0$ විට $x = 0$ සහ $\dot{x} = 0$ වන අතර කාලය t විට අංශුව O සිට x දුරින් වේ.

$x = \frac{1}{2}Ft^2 + kFt(t - T)$ යන්නෙන් දෙනු ලබන විට $\int_0^T L\,dt$ අගයන්න; මෙහි k නියතයකි.

ඉහත දෙනු ලබන x හැමිල්ටන් මූලධර්මය සමඟ එකඟ වන්නේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

6. ස්කන්ධය M වූ සමමිතික බමරයක් පූර්ණ රළු බිමක් මත O ලක්ෂ්‍යයක් වටා භ්‍රමණය වේ. සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$\dot{\varphi} + \dot{\phi}\cos\theta = n$$

$$A\dot{\phi}\,sin^2\theta + Cn\cos\theta = D$$

$$A\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^{\,2}sin^2\theta\right) + Cn^2 + 2Mgh\cos\theta = E$$

බව පෙන්වන්න.

$C^2n^2 \geq 4A\,Mgh\cos\alpha$ වන්නේ නම් $\theta = \alpha$ සහ $\dot{\phi} = \Omega$ වන සතත චලිතයක් සිදු විය හැකි බව පෙන්වන්න.

තව දුරටත් $\theta = \alpha$ වටා බමරය කුඩා දෝලන සිදු කරන්නේ නම් කාලාවර්තය $\frac{2\pi}{p}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $p^2 = \frac{1}{A^2\Omega^2}(M^2g^2h^2 - 2AMgh\Omega^2\cos\alpha + A^2\Omega^4)$ වේ.

7. $[F, G]$ පුවාසෝන් වරහන $[F, G] = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}$ යන්නෙන් අර්ථ දක්වනු ලැබේ; මෙහි $q_i, p_i (i = 1,2,\ldots,n)$ යනු පිළිවෙලින් ගතික පද්ධතියක සාධාරිත ඛණ්ඩාංක සහ සාධාරිත ගම්‍යතා වේ.

(අ) $\frac{d}{dt}[F, G] = \left[\frac{dF}{dt}, G\right] + \left[F, \frac{dG}{dt}\right]$ බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

$F(q,p,t)$ සහ $G(q,p,t)$ චලිත නියත වේ නම්, $[F,G]$ පුවාසෝන් වරහනද චලිත නියතයක් වන බව පෙන්වන්න.

(ආ) සෞත්‍රික පරිණාමනයක් අර්ථ දක්වන්න.

$Q = q^{\alpha}\cos\beta p$, $P = q^{\alpha}\sin\beta p$ සෞත්‍රික පරිණාමනයක් නිරූපණය කරන්නේ α සහ β හි කුමන අගයන් සඳහාද?

(ඇ) $F = -(e^{Q}-1)^2 \tan p$ ශ්‍රිතය

$$Q = \ln\left(1+\sqrt{q}\ \cos p\right) \qquad P = 2\sqrt{q}\ (\sin p)\ \left(1+\sqrt{q}\ \cos p\right)$$

සෞත්‍රික පරිණාමනය ජනනය කරන බව පෙන්වන්න.

8. ස්කන්ධය $2m$ සහ දිග $2a$ වන ඒකාකාර දණ්ඩක් A අග්‍රය හරහා යන තිරස් අක්ෂයක් වටා නිදහසේ පැද්දෙයි. සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කොනක් දණ්ඩෙහි B අග්‍රයට සම්බන්ධ කර ඇති අතර අනෙත් කොනෙහි ස්කන්ධය m වන අංශුවක් දරා සිටියි.

පද්ධතිය ස්ථායි සමතුලිතතාවයෙහි පවතින විට තන්තුවෙහි දිග $\frac{4a}{3}$ වන අතර එහි විතතිය ϵ වේ. පද්ධතිය AB හරහා යන සිරස් තලයෙහි කුඩා දෝලන සිදු කරයි.දණ්ඩ සහ තන්තුව යටි අත් සිරස සමඟ θ සහ ϕ කෝණ සාදන අතර තන්තුවෙහි දිග $x + \frac{4a}{3}$ වේ.

පද්ධතියෙහි ප්‍රමත ඛණ්ඩාංක $x, \phi + 2\theta, 2\phi - 3\theta$ සහ අදාල සරල අවලම්බයන්හි දිග $\epsilon, \frac{8a}{3}, \frac{a}{3}$ වන බව පෙන්වන්න.

___________//___________