කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි දෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2021

2024 ඔක්තෝබර්

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය- PMAT - E 2025

අපරිමිත ශ්‍රේණි සහ සාමාන්‍ය අවකල සමීකරණ

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව: අට (08)යි පිටු සංඛ්‍යාව: හතර(04) යි කාලය: පැය තුන(03)යි

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

01. (අ) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ යයි කීමෙන් අදහස් කරන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

(ආ) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ සහ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ධන පද වලින් සමන්විත ශ්‍රේණි යයි ගනිමු. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0$ සහ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ අභිසාරී වේ නම් , $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ද අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න.

සුදුසු පරීක්ෂාවන් භාවිතා කරමින්, පහත එක් එක් ශ්‍රේණිය අභිසාරී හෝ අපසාරී වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3}\right)$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-\cos^2 n}$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^n+3^n}$.

02. (අ) ධන පද වලින් සමන්විත $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ශ්‍රේණිය සඳහා අනුපාත පරීක්ෂාව සහ මූල පරීක්ෂාව ලියා දක්වන්න.

භාවිතා කරන පරීක්ෂාව පැහැදිලිව සඳහන් කරමින්, පහත ශ්‍රේණි වල අභිසාරිතාවය නිර්ණය කරන්න.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1-2n}}{n^2+1}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2-1}{n^2+3}\right)^n$.

(ආ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)^p}$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන p හි අගය නිර්ණය කිරීමට අනුකල පරීක්ෂාව භාවිතා කරන්න.

මතු සම්බන්ධයි....

(ඇ) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ශ්‍රේණිය නිරපේක්ෂ ලෙස අභිසාරී හා අසම්භාව්‍ය ලෙස අභිසාරී යයි කීමෙන් අදහස් කරන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ ශ්‍රේණියෙහි නිරපේක්ෂ ලෙස අභිසාරීතාවය හා අසම්භාව්‍ය ලෙස අභිසාරීතාවය පරීක්ෂා කරන්න.

03. (අ) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ ප්‍රතිඵලය භාවිතා කිරීමෙන් හෝ අන් අයුරකින් $|x| < 1$ සඳහා $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-2)^n}{5^n}$ අගයන්න.

(ආ) පහත එක් එක් ශ්‍රේණියෙහි අභිසාරිතා අරය සහ අභිසාරිතා ප්‍රාන්තරය සොයන්න.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

04. කාලාවර්තය 2π වන f ආවර්ත ශ්‍රිතයක් $f(x) = x^2$ මගින් $[-\pi, \pi]$ මත අර්ථ දක්වනු ලැබේ. $f(x)$ හි ෆූරියර් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}, -\pi \le x \le \pi$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

එනයින්, 2π කාලාවර්තය සහිත $g(x) = x,\ -\pi \le x \le \pi$ ශ්‍රිතයෙහි ෆූරියර් ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය සොයන්න.

පහත එක් එක් ශ්‍රේණියේ ඓක්‍යය අපෝහනය කරන්න:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1}$ (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2}$.

05. (අ) $x^2 = u$ සහ $y^2 = v$ පරිණාමන භාවිතයෙන් $yp^2 + x^3p - x^2y = 0$ සමීකරණය ක්ලේරෝගේ (Clairaut's) ආකාරයට හරවන්න.

එනයින් එම සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(ආ) $y' = (y-x)^2 + 1$ මගින් දෙනු ලබන රිකාටිගේ (Riccati's) සමීකරණය සලකන්න.

(i) $y = x$ යනු එහි අපූර්ව විසඳුමක් වන බව පෙන්වන්න.
(ii) සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

මතු සම්බන්ධයි....

(iii) $y(0) = \frac{1}{2}$ නම්, එහි තවත් එක් අපූර්ව විසඳුමක් $y = x + \frac{1}{2-x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ඈ) $y = e^x v(x)$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $(x-1)y'' - xy' + y = 1, x \neq 1$ සමීකරණය විසඳන්න.

06. (අ) $x = e^t$ වේ නම්,

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \qquad \text{සහ} \qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

බව පෙන්වන්න.

එනයින් $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2\ln x$ හි විසඳුම සොයන්න.

(ආ) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සෙවීම සඳහා පරාමිති විචලන ක්‍රමය භාවිතා කරන්න.

07. (අ) පහත එක් එක් සමීකරණය විසඳන්න.

(i) $(D^2 + 3D + 2)y = e^{2x}\sin x$.

(ii) $(9D^2 - 6D + 1)y = \cos x$.

(ආ) පහත ආරම්භක අගීය ගැටළුව විසඳීමට ලප්ලාස් පරිණාමන ක්‍රමය භාවිතා කරන්න.

$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 6e^{-t}, \ y(0) = 1, y'(0) = 2.$

(ඇ) පහත සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න

$$\frac{dx_1}{dt} = 5x_1 - 4x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - 2x_2$$

, මෙහි $x_1(0) = 3, x_2(0) = 2$ වේ.

08. (අ) ශ්‍රේණි විසඳුම් ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $x = 0$ වටා $y'' - xy' - y = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

(ආ) $8x^2y'' + 10xy' + (x-1)y = 0$ අවකල සමීකරණය සලකන්න.

(i) $x = 0$ සමීකරණයෙහි සවිධි අපූර්ව ලක්ෂ්‍යයක් බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි....

(ii) $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+k}$, $c_0 \neq 0$ සමීකරණයෙහි විසඳුමක් වේ නම්,

(අ) දර්ශක සමීකරණයෙහි මූල සොයන්න.

(ආ) $m \geq 1$ සඳහා $c_m = \frac{-1}{(4(k+m)-1)(2(k+m)+1)} c_{m-1}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $x = 0$ වටා සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

****