කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දූරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි දෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2021

2024 ඔක්තෝබර්

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

PMAT- E 2015 | විවික්ත ගණිතය II

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව: අටයි (08) | පිටු සංඛ්‍යාව: තුනයි (03) | කාලය: පැය තුනයි (03)

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (a) V සහ W යනු U දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ දෙකක් යැයි ගනිමු.

$$V + W = \{v + w \ : \ v \in V \text{ සහ } w \in W\}$$

U හි උප අවකාශයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(b) i. $M = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ දෛශික අවකාශය සලකන්න.

$W = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \ : \ a, b, d \in \mathbb{R}\}$ කුලකය M හි උප අවකාශයක් බව පෙන්වන්න.

ii. $V = \{(a, 1) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ කුලකය $\mathbb{R}^2$ හි උප අවකාශයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

(c) $S = \{(2, 5), (1, 3)\}$ කුලකය $\mathbb{R}^2$ පරායනය කරන බව පෙන්වන්න.

2. (a) මාත්‍රය 2 හෝ ඊට අඩු වූ බහුපදයන්ගෙන් සමන්විත අවකාශයෙහි වූ $p(x) = 1 + x - 2x^2$, $q(x) = 2 + 3x - x^2$ සහ $r(x) = x + x^2$ බහුපද ඒකජ ලෙස ස්වායත්ත වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

(b) V දෛශික අවකාශයේ U සහ W උප අවකාශ සඳහා මාන ප්‍රමේය ප්‍රකාශ කරන්න.

(c) u_1, u_2, w_1 සහ w_2 යන $\mathbb{R}^3$ හි දෛශික $u_1 = (1, 0, 0)^T, u_2 = (1, 1, 0)^T, w_1 = (0, 0, 1)^T$ සහ $w_2 = (0, 1, 0)^T$ මගින් දෙනු ලැබේ. $U = span\{u_1, u_2\}$ සහ $W = span\{w_1, w_2\}$ මගින් $\mathbb{R}^3$ හි U සහ W උප අවකාශ අර්ථ දක්වා ඇත.

i. U සහ W සඳහා පදනම් සොයන්න.

ii. $U \cap W$ හි මානය සෙවීම සඳහා මාන ප්‍රමේය භාවිතා කරන්න.

3. (a) $\underline{v} = (v_1, v_2)$ යනු $\mathbb{R}^2$ හි දෛශිකයකි. $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ යන්න $T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$ මගින් අර්ථ දැක්වේ. T යනු ඒකජ පරිණාමනයක් බව පෙන්වන්න.

(b) $T \ : \ \mathbb{R}^3 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^3$ යනු $T(0, 1, 0) \ = \ (2, -1, 4), T(0, 1, 0) \ = \ (1, 5, -2)$ සහ $T(0, 0, 1) \ = \ (0, 3, 1)$ වන පරිදි වූ ඒකජ පරිණාමනයකි. $T(2, 3, -2)$ සොයන්න.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ඒකජ පරිණාමනයක් $T(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇත.

i. පරිණාමනය $T(\underline{x}) = A\underline{x}, \ \underline{x} \in \mathbb{R}^3$ ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න. මෙහි A යනු නිර්ණය කල යුතු න්‍යාසයකි.

ii. T හි පරාසය සහ T හි මදය සඳහා පදනම් සොයන්න.

4. (a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ඒකජ පරිණාමනය $T(x,y) = (x+y, 2x-y)$ මගින් අර්ථ දැක්වේ. $B = \{(1,2), (-1,1)\}$ සහ $B' = \{(1,0), (0,1)\}$ පදනම් වලට සාපේක්ශව T හි න්‍යාස නිරූපණය, A සොයන්න.

(b) $B = \{(-3,2), (4,-2)\}$ සහ $B' = \{(-1,2), (2,-2)\}$ යනු $\mathbb{R}^2$ සඳහා පදනම් දෙකක් යැයිද $A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ යනු B පදනමට සාපේක්ෂව $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ඒකජ පරිනාමනයේ න්‍යාස නිරූපණය යැයිද ගනිමු.

i. B' සිට B දක්වා සංක්‍රාම්‍ය න්‍යාසය P සොයන්න.

ii. $[\underline{v}]_B$ සහ $[T(\underline{v})]_B$ සෙවීම සඳහා A සහ P න්‍යාස භාවිතා කරන්න.මෙහි $[\underline{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ වේ.

iii. B' ට සාපේක්ශව T හි න්‍යාස නිරූපණය A' සහ P^{-1} සොයන්න.

iv. $[T(\underline{v})]_{B'}$ සොයන්න.

5. (a) $\underline{u} = (u_1, u_2), \underline{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ සඳහා $< \underline{u}, \underline{v} >= u_1v_1 + 2u_2v_2$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇත. $\mathbb{R}^2$ මත $< \underline{u}, \underline{v} >$ අන්තඃගුණිතයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(b) අන්තඃගුණිත අවකාශයක් සඳහා වන කොෂි-ස්වාර්ට්ස අසමානතාව සහ ත්‍රිකෝණ අසමානතාව ප්‍රකාශ කරන්න.

(c) $f(x)$ සහ $g(x)$ සඳහා $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\, dx$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇත. $[a,b]$ මත සියලු තාත්වික අගීය සන්තතික ශ්‍රිත කුලකය $C[a,b]$ මත $< f, g >$ අන්තඃගුණිතයක් වේ.

i. $f(x) = 1$ සහ $g(x) = x$ වන, $C[0,1]$ දෛශික අවකාශයෙහි ශ්‍රිතයන් සඳහා දෙන ලද අන්තඃගුණිතයට සාපේක්ශව කොෂි-ස්වාර්ට්ස අසමානතාව සහ ත්‍රිකෝණ අසමානතාව සත්‍යාපනය කරන්න.

ii. g මතට වූ f හි ප්‍රලම්භ ප්‍රක්ෂේපණය සොයන්න.

6. (a) $v_1, v_2, ..., v_n$ යනු A න්‍යාසයක $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ නම් ප්‍රභින්න අයිගන් අගයන්ට අනුරූප වූ නිශ්ශුන්‍ය අයිගන් අවකාශයයි ගනිමු. $v_1, v_2, ..., v_n$ ඒකජ ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

(b) ගණය n වන සමචතුරස්‍ර A න්‍යාසය විකර්ණීකරණය කල හැකි වේ යැයි කීමෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි පැහැදිලි කරන්න.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමු.

i. A හි ලාක්ෂණික බහුපදය සොයන්න.

ii. කේලි-හැමිල්ටන් ප්‍රමේය සත්‍යාපනය කරන්න.

iii. A හි අයිගන් අගයන් සහ අදාල අයිගන් අවකාශ සොයන්න.

iv. දී ඇති A න්‍යාසය විකර්ණීකරණය කල හැකි හෝ නොහැකි බව නිර්ණය කරන්න. එය එසේ වේ නම් $P^{-1}AP$ විකර්ණ න්‍යාසයක් වන පරිදි P නම් න්‍යාසයක් සොයන්න.

7. (a) A න්‍යාසයක අවම බහුපදය අර්ථ දක්වන්න.
A න්‍යාසයක අවම බහුපදය මගින්, A මූලයක් වන ඕනෑම බහුපදයක් බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ න්‍යාසය සලකන්න.

i. A හි ලාක්ෂණික බහුපදය සොයන්න.

ii. A හි අවම බහුපදය සොයන්න.

iii. A හි විය හැකි සියලුම ජෝර්ඩාන් සෞත්‍රික ආකාර සොයන්න.

8. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ලෙස ගන්න. $P^{-1}AP$ විකර්ණ න්‍යාසයක් වන පරිදි P සොයන්න.

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ න්‍යාසයෙහි අයිගන් දෛශික සොයා, $P^{-1}AP$ විකර්ණ න්‍යාසයක් වන පරිදි P සොයන්න.
එනයින් පහත දැක්වෙන ඒකජ අවකල සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

$$\frac{dy_1}{dt} = 3y_1 + 2y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 6y_1 - y_2$$

—අවසානයි—