කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි දෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2016

2022 දෙසැම්බර් - 2023 මාර්තු

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

Infinite Series and Ordinary Differential Equation PMAT– E 2025

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 08 යි. කාලය : පැය 03 යි.

---

1. (i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ අභිසාරී නම්, එවිට $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී හෝ අපසාරී වේදැයි නිර්ණය කරන්න.

(ii) (a) $[1, \infty)$ මත අර්ථ දක්වා ඇති අනුරූප ශ්‍රිතයක් සහිත $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ අපරිමිත ශ්‍රේණියේ අභිසාරීතාවය සඳහා අනුකල පරීක්ෂාව පැහැදිලිව සඳහන් කරන්න.

(b) අනුකල පරීක්ෂාව භාවිතයෙන් $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ අභිසාරී බව පෙන්වන්න.

(iii) පහත ශ්‍රේණිවල අභිසාරීතාවය පරීක්ෂා කරන්න.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{5n+1}$

2. (i). පහත දැක්වෙන ශ්‍රේණි නිරපේක්ෂ ලෙස අභිසාරී ද අසම්භාව්‍ය ලෙස අභිසාරී ද හෝ අපසාරී ද යන්න නිර්ණය කරන්න. ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{1+2n}}{5^{n+1}} (x+3)^n$ ශ්‍රේණියේ අභිසාරිතා අරය සහ අභිසාරිතා ප්‍රාන්තරය සොයන්න.

3. (i) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$; $|x| < 1$ බල ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණය සලකන්න.

(a) $ln\,(1-x)$ සඳහා බල ශ්‍රේණි නිරූපනයක් සොයා එහි අභිසාරිතා අරය සොයන්න.

(b) $tan^{-1}(x)$ සඳහා බල ශ්‍රේණි නිරූපනයක් සොයා එනයින් $\int \frac{1}{1+x^4} dx$ අගයන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

(ii) $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2 x^n}{(2n)!}$ බල ශ්‍රේණිය මගින් අර්ථ දක්වා ඇති $g(x)$ ශ්‍රිතය සලකන්න.

(a) ඉහත බල ශ්‍රේණියේ අභිසාරිතා අරය සොයන්න.

(b) බල ශ්‍රේණියේ පළමු නිශ්ශූන්‍ය පද තුන භාවිත කරමින් $\int_0^1 \frac{g(x)-1}{x} dx$ හි අගය ඇස්තමේන්තු කරන්න.

4. $f(x)$ යනු ආවර්තය 2π වන පහත පරිදි අර්ථ දක්වා ඇති ශ්‍රිතයකි.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le \pi \\ \pi, & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

(a) $-2\pi \le x < 2\pi$ ප්‍රාන්තරය තුල $f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයේ දල සටහනක් අදින්න.

(b) $0 < x < 2\pi$ තුල $f(x)$ හි ෆුරියර් ශ්‍රේණිය $\frac{3\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right] - \left[sinx + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right]$ බව පෙන්වන්න.

(c) x සඳහා සුදුසු අගයක් ලබා දෙමින් $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$ සහ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$ බව පෙන්වන්න.

5. (i) $x^2 = u$ සහ $y^2 = v$ ආදේශය භාවිතයෙන් $x^2(y - px) = yp^2$, අවකල සමීකරණය ක්ලෙයිරෝ ආකාරයට පරිවර්තනය කර සාධාරණ විසඳුම ලබා ගන්න. මෙහි $p = \frac{dy}{dx}$.

(ii) $e^x sinx$ සහ $e^x cosx$ යනු $y'' - 2y' + 2y = 0$ හි ඒකජ ලෙස ස්වායත්ත විසඳුම් බව පෙන්වන්න.

$y(0) = 2, y'(0) = 3$ කොන්දේසි සපුරාලන $y(x)$ හි විසඳුම සොයන්න.

6. (i) $x = e^t$ නම්, එවිට $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$ සහ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$ බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 9x\frac{dy}{dx} + 15y = 2 + \ln x$ බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

(ii) $y = z^2$ ආදේශය භාවිතයෙන් $2x^2y\frac{d^2y}{dx^2} + 4y^2 = x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx}$

සමීකරණය සමජාතීය ආකාරයට ඌනනයකර, එනයින් විසඳන්න.

7. (i) පහත අවකල සමීකරණ විසඳන්න.

(a) $(D^2 - 4D - 5)y = xe^{-x}$

(b) $(D^2 + a^2)y = \sec ax$

(c) $(D^2 - 4D + 4)y = x^2 + e^x + \cos 2x$

(ii) පහත සමගාමී අවකල සමීකරණ විසඳන්න.

$$\frac{dx}{dt} + 2x - 3y = 1$$

$$\frac{dy}{dt} + 2y - 3x = e^{-t}$$

8. (i) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + x^2y = 0$ අවකල සමීකරණයේ $x = 0$ වටා සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(ii) $9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0$ අවකල සමීකරණය සලකන්න.

(a) $x = 0$ යනු ඉහත අවකල සමීකරණයේ සවිධි අපූර්ව ලක්ෂ්‍යයක් බව පෙන්වන්න.

(b) දර්ශක සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

(c) $x = 0$ වටා අවකල සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

---------------- අවසානයි ------------