කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි දෙවන පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2016

2022 දෙසැම්බර් - 2023 මාර්තු

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

විවික්ත ගණිතය II PMAT– E 2015

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 08 යි. කාලය : පැය 03 යි.

---

01. (a) (i) V සහ W යනු U දෛශික අවකාශයෙහි උප අවකාශ දෙකක් යැයි ගනිමු. V සහ W හි ඡේදනය $(V \cap W)$ ද U හි උප අවකාශයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(ii) A යනු අචල 2×3 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු. $W = \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : A\underline{x} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$ කුලකය $\mathbb{R}^3$ හි උප අවකාශයක් නොවන බව පෙන්වන්න.

(b) (i) $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ යනු V දෛශික අවකාශයේ දෛශික කුලකයක් යැයි ගනිමු. S හි සියලු ඒකජ සංයෝජන අඩංගු කුලකය $span\ (S)$, V හි උප අවකාශයක් වන බව පෙන්වන්න.

S අඩංගු අනෙක් සියලු උප අවකාශ තුල $span\ (S)$ අඩංගු විය යුතු බව ද සාධනය කරන්න.

(ii) $S = \{(1,2,3), (0,1,2), (-2,0,1)\}$ කුලකය $\mathbb{R}^3$ පරායනය කරන බව පෙන්වන්න.

02. (a) මාත්‍රය 3 හෝ ඊට අඩු වූ බහුපදයන්ගෙන් සමන්විත දෛශික අවකාශයෙහි වූ $p(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 1,\ q(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$ සහ $r(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 7$ බහුපද ඒකජ ලෙස ස්වායත්ත වේ දැ යි නිර්ණය කරන්න.

(b) V දෛශික අවකාශයේ U සහ W උප අවකාශ සඳහා මාන ප්‍රමේය ප්‍රකාශ කරන්න.

(c) $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2,$ සහ w_3 යන $\mathbb{R}^4$ හි දෛශික

$u_1 = (1,1,0,-1)^T,\ u_2 = (1,2,3,0)^T, u_3 = (2,3,3,-1)^T, w_1 = (1,2,2,-2)^T, w_2 = (2,3,2,-3)^T,$ සහ $w_3 = (1,3,4,-3)^T$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$U = span\{u_1, u_2, u_3\}$ සහ $W = span\{w_1, w_2, w_3\}$ මගින් $\mathbb{R}^4$ හි U සහ W උප අවකාශ අර්ථ දක්වා ඇත.

(i) U, W සහ $U + W$ සඳහා පදනම් සොයන්න.

(ii) $U \cap W$ හි මානය සෙවීම සඳහා මාන ප්‍රමේය භාවිතා කරන්න.

(iii) $U + W$ එකතුව ඍජු දැයි නිර්ණය කරන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

03. ඒකජ පරිණාමනයක තාරාව සහ අභිශුන්‍යතාව අර්ථ දක්වන්න.

$T: V \rightarrow W$ යනු ඒකජ පරිණාමනයක් වේ යැයි සහ $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ යනු T හි වසම සඳහා පදනමක් යැයි ගනිමු. $T(u_1),\ T(u_2), \ldots, T(u_n)$ දෛශික T හි පරාසය පරායනය කරන බව පෙන්වන්න.

(a) $\mathbb{R}^3$ සඳහා වූ $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ පදනම සලකන්න. $T(1,1,1) = (0,1), T(1,1,0) = (2,3)$ සහ $T(1,0,0) = (4,5)$ වන පරිදි වූ ඒකජ පරිණාමනය සඳහා $T(x, y, z)$ සොයන්න.

(b) $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ඒකජ පරිණාමනයක් $T(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t)$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇත.

(i) පරිණාමනය $T(\underline{x}) = A\underline{x},\ \underline{x} \in \mathbb{R}^4$ ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න , මෙහි A යනු නිර්ණය කල යුතු න්‍යාසයකි.

(ii) T හි පරාසය සහ T හි මදය සඳහා පදනම් සොයන්න.

(iii) ඉහත T සඳහා තරා- අභිශුන්‍යතා ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කරන්න.

04. $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ සහ $B' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ යනු $\mathbb{R}^3$ සඳහා පදනම් දෙකක් යැයිද

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$ යනු B පදනමට සාපේක්ෂව $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ඒකජ පරිනාමනයේ න්‍යාස නිරූපණය යැයිද ගනිමු.

(i) B' සිට B දක්වා සංක්‍රාම්‍ය න්‍යාසය P සොයන්න.

(ii) $[\,\underline{v}\,]_B$ සහ $[\,T(\underline{v})]_B$ සෙවීම සඳහා A සහ P න්‍යාස භාවිතා කරන්න; මෙහි $[\,\underline{v}\,]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ වේ.

(iii) B' ට සාපේක්ෂව T හි න්‍යාස නිරූපණය A' සහ P^{-1} සොයන්න.

(iv) පළමුව $P^{-1}[\,T(\underline{v})]_B$ සහ ඊට පසු $A'[\,\underline{v}\,]_{B'}$ සොයා $[\,T(\underline{v})\,]_{B'}$ සොයන්න.

මීතුසම්බන්ධයි...

05. අන්තඃගුණිත අවකාශයක් සඳහා වන කොෂි-ස්වාර්ට්ස අසමානතාව සහ ත්‍රිකෝණ අසමානතාව ප්‍රකාශ කරන්න.

$f(x)$ සහ $g(x)$ සඳහා $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)$ මඟින් අර්ථ දක්වා ඇත .

$[a, b]$ මත සියලු තාත්වික අගීය සන්තතික ශ්‍රිත කුලකය $C[a, b]$ මත $\langle f, g\rangle$ අන්තඃගුණිතයක් වන බව සාධනය කරන්න.

(i) $f(x) = x$ සහ $g(x) = 3x^2 - 1$ සඳහා දෙන ලද අන්තඃගුණිතයට සාපේක්ෂව කොෂි-ස්වාර්ට්ස අසමානතාව සහ ත්‍රිකෝණ අසමානතාව සත්‍යාපනය කරන්න.

(ii) $f(x) = x$ සහ $g(x) = cx + 1$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ සහ $g(x)$ ප්‍රලම්බ වන පරිදි c හි අගය නිර්ණය කරන්න.

මෙම c අගය සහිත වූ $f(x)$ සහ $g(x)$ සඳහා පයිතගෝරියානු ප්‍රමේය සත්‍යාපනය කරන්න.

06. (a) $v_1, v_2, \dots v_n$ යනු A න්‍යාසයක $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ නම් ප්‍රභින්න අයිගන් අගයන්ට අනුරූප වූ නිශ්ශූන්‍ය අයිගන් දෛශික යයි ගනිමු. $v_1, v_2, \dots v_n$ ඒකජ ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

(b) ගණය n වන සමචතුරස්‍ර A න්‍යාසය විකර්ණීකරණය කල හැකි වේ යැයි කීමෙන් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි පැහැදිලි කරන්න.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$ යැයි ගනිමු.

(i) A හි ලාක්ෂණික බහුපදය සොයන්න.

(ii) කේලි-හැමිල්ටන් ප්‍රමේය සත්‍යාපනය කරන්න.

(iii) A හි අයිගන් අගයන් සහ අදාල අයිගන් අවකාශ සොයන්න.

(iv) දී ඇති A න්‍යාසය විකර්ණීකරණය කල හැකි හෝ නොහැකි බව නිර්ණය කරන්න. එය එසේ වේ නම් $P^{-1}AP$ විකර්ණ න්‍යාසයක් වන පරිදි P නම් න්‍යාසයක් සොයන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

07. (a) A න්‍යාසයක අවම බහුපදය අර්ථ දක්වන්න.

A න්‍යාසයක අවම බහුපදය මගින් A මූලයක් වන ඕනෑම බහුපදයක් බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ න්‍යාසය සලකන්න.

(i) A හි ලාක්ෂණික බහුපදය $\lambda^2(\lambda - 1)^2$ බව පෙන්වන්න.

(ii) A හි අවම බහුපදය සොයන්න.

(iii) A හි විය හැකි සියලුම ජෝර්ඩාන් සෞත්‍රික ආකාර සොයන්න.

08. (a) $v_1 = (1,1,0)$ සහ $v_2 = (1,0,2)$ දෛශික මගින් $\mathbb{R}^3$ හි උප අවකාශයක් පරායනය කරයි.

(i) මෙම උප අවකාශය සඳහා ප්‍රාහිලම්භ පදනමක් සොයන්න.

(ii) මෙම පදනම $\mathbb{R}^3$ හි ප්‍රාහිලම්භ පදනමක් දක්වා දීර්ඝ කරන්න.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 2 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ න්‍යාසයෙහි අයිගන් දෛශික $(1,-1,1)^t, (-3,0,1)^t$ සහ $(-1,1,0)^t$ බව දී ඇත්නම්, $P^{-1}AP$ විකර්ණ න්‍යාසයක් වන පරිදි P සොයන්න

එනයින් පහත දැක්වෙන ඒකජ අවකල සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 - 2y_2 - 6y_3$$

$$\frac{dy_2}{dt} = 2y_1 + 5y_2 + 6y_3$$

$$\frac{dy_3}{dt} = -2y_1 - 2y_2 - 3y_3$$

මෙහි $y_1(0) = y_2(0) = 1$ සහ $y_3(0) = 0$ වේ.

********************//*********************