කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ප්‍රථම පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2021
2024 නොවැම්බර්/ දෙසැම්බර්

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය
(අධ්‍යයන වර්ෂ 2007 සිට 2016 දක්වා)

උසස් කලනය PMAT – E1035

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 08 යි. කාලය : පැය 03 යි.

---

01. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ යනු තාත්වික සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක් යයිද $L \in \mathbb{R}$ යයිද ගනිමු.

(අ) $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ යන්නෙන් අදහස්වන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.

අනුක්‍රමයක සීමාවේ අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2+2n+1} = \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) පහත සීමා ඇගයීමට සීමා වල ගුණ භාවිතා කරන්න.

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$ (ii) $\lim_{n\to\infty}\{\ln(n^2+1) - \ln(2n^2+3)\}$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\left\{e^{-n^2}\sin\frac{n^2\pi}{2}\right\}$ (iv) $\lim_{n\to\infty}\left\{ne^{\frac{2}{n}} - n\right\}$.

02. (අ) $s_1 = 1$ සහ $n \geq 1$ සඳහා $s_{n+1} = \frac{1}{3}(s_n + 1)$ සහානුයාත සම්බන්ධය මගින් $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ තාත්වික අනුක්‍රමයක් අර්ථ දක්වා ඇත.

(i) s_2, s_3 සහ s_4 සොයන්න.

(ii) සියලු n සඳහා $s_n > \frac{1}{2}$ බව පෙන්වීමට ගණිත අභ්‍යුහනය භාවිතා කරන්න.

(iii) $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ඒකවිධ ලෙස අඩුවන අනුක්‍රමයක් බව පෙන්වන්න.

(iv) $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ අභිසාරී බව පෙන්වා $\lim_{n\to\infty} s_n$ සොයන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

(ආ) $[0,1]$ තුළ සියළු x සඳහා $f(x)$ ශ්‍රිතය අවකල්‍ය යයිද $f(0) = 0$ යයිද ගනිමු.
$a_n = nf\left(\frac{1}{n}\right)$ සම්බන්ධය මගින් $\{a_n\}$ අනුක්‍රමය අර්ථ දක්වන්න. $x = \frac{1}{n}$ ලෙස ගෙන, අවකලන සංගුණකයෙහි අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0)$ බව පෙන්වන්න.
එනයින් $\lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ අගයන්න.

03. (i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ යනු ශ්‍රිතයක් සහ a යනු තාත්වික සංඛ්‍යාවක් යයි ගනිමු.පහත ප්‍රකාශන මගින් අදහස් වන්නේ කුමක්දැයි අර්ථ දක්වන්න.
(i) a හි දී f සන්තතික වේ
(ii) a හි දී f අවකල්‍ය වේ

(ii) $x = a$ හිදී අවකල්‍ය ශ්‍රිතයක් එම ලක්ෂ්‍යයෙහිදී සන්තතිකද වන බව සාධනය කරන්න.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x^2-16x}{(x-2)^2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases}$$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇති f ශ්‍රිතය $x = 2$ හිදී සන්තතික වීම සඳහා k හි අගය සොයන්න.

(iii) $$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & -3 \leq x < -2 \\ x+1 & -2 \leq x < 0 \\ x+2 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$ ශ්‍රිතය සලකන්න.

$x = -2$ හිදී
(i) f ශ්‍රිතය සන්තතික වන බව පෙන්වන්න.
(ii) f ශ්‍රිතයෙහි අවකල්‍යතාවය නිර්ණය කරන්න.

04. පහත සීමා අගයන්න.

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{5x^4-4x^3-1}{10-x-9x^3}$

(ii) $\lim_{x\to 4} \frac{\sin(\pi x)}{x^2-16}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x)}{x^2}$

(iv) $\lim_{x\to 0^+} (\cos(2x))^{1/x^2}$

(v) $\lim_{x\to\infty} [e^x + x]^{1/x}$.

05. (අ) $y = x^2 + 2, y = \sin x, x = -1$ සහ $x = 2$ වක්‍ර මගින් වටවූ ක්ෂේත්‍රඵලය සොයන්න.

(ආ) නැවත නැවතත් කොටස් වශයෙන් අනුකලනයෙන්
$$\int \sin^n x \ \ dx = -\frac{1}{n}\cos x \ \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \ \ dx + C, n \geq 2$$
බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

එනයින් පහත අනුකල අගයන්න.

(i) $\int \sin^4 x \ \ dx$ (ii) $\int \sin^3 x \ \cos^4 x \ \ dx.$

06. (අ) මධ්‍යනාය අගය ප්‍රමේයය පැහැදිලිව ප්‍රකාශ කරන්න.

$f(x)$ ශ්‍රිතය $[-7,0]$ තුලදී සන්තතික සහ $(-7,0)$ තුලදී අවකල්‍ය වේ යයි සිතමු. $f(-7) = 3$ වන අතර $[-7,0]$ හි සියලු x සඳහා $f'(x) \leq 2$ නම්, $f(0)$ ට ගත හැකි විශාලම අගය නිර්ණය කිරීම සඳහා මධ්‍යනාය අගය ප්‍රමේයය භාවිතා කරන්න.

(ආ) පහත සාමාන්‍ය අවකල සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $xydy - (x^2 + y^2)dx = 0.$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}.$

07. $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ යයි ගනිමු.

(i) f හි x හා y අන්ත:ඛණ්ඩ සොයන්න. f හි සිරස් සහ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ පවතී නම් ඒවාද සොයන්න.

(ii) $f'(x) = \frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) f හි අවධි ලක්ෂ්‍ය සොයා ඒවා වර්ගීකරණය කිරීමට දෙවන අවකලන සංගුණක පරීක්ෂාව භාවිතා කරන්න.

(iv) f හි ප්‍රස්තාරයේ අවතලතාව නිර්ණය කොට එනයින් f හි නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය පවතී නම් ඒවා සොයන්න.

(v) f හි දළ සටහනක් අඳින්න.

08. $[a,b]$ ප්‍රාන්තරය තුල සන්තතික සෘණ නොවන $y = f(x)$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්ථාරයෙන්, x −අක්ෂයෙන් සහ $x = a$ සහ $x = b$ ප්‍රස්ථාර වලින් වටවූ ප්‍රදේශය y −අක්ෂය වටා භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙහි $b > a \geq 0$ වේ. සිලින්ඩරාකාර කුහර ක්‍රමය භාවිතයෙන් ඵලිත ඝන වස්තුවේ පරිමාව

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

මගින් දෙන බව පෙන්වන්න.
$y = \sqrt{x}$ සහ $y = (x-1)^2$ වක්‍ර මගින් වටවූ ක්ෂේත්‍රඵලය y −අක්ෂය වටා භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. ඵලිත ඝන වස්තුවේ පරිමාව සොයන්න.

****