කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ප්‍රථම පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2019

2023 අප්‍රේල්/ මැයි

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

උසස් කලනය - PMAT – E1035

ප්‍රශ්න හයකට (06) පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 07 යි. කාලය : පැය 03 යි.

---

01. (a) A සහ B යනු $A \subseteq B$ වන පරිදි වූ නොහිස් කුලක දෙකක් යයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

බව පෙන්වන්න.

$A = \left\{ \frac{1}{4n^2} \mid n \in \mathrm{N} \right\}$ සහ $B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2} \mid n \in \mathrm{N} \right\}$ යයි ගනිමු. $\inf A, \sup A$, $\inf B$ සහ $\sup B$ සොයා ඉහත අසමානතාව අපෝහනය කරන්න.

(b) (i) p යනු ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් යයි ගනිමු. $\sqrt{p}$ යනු අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් බව පෙන්වන්න.

(ii) r යනු පරිමේය සංඛ්‍යාවක් නම් එවිට $r + \sqrt{3}$ යනු අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් බව පෙන්වීමට විසංවාදී ක්‍රමය භාවිතා කරන්න.

(iii) ඕනෑම තාත්වික සංඛ්‍යා දෙකක් අතර පරිමේය සංඛ්‍යාවක් පවතින බව පෙන්වන්න.

02. (a) සීමාව පිළිබඳ $\varepsilon - \delta$ අර්ථ දැක්වීම භාවිතා කරමින් $\lim_{x \to 1}(x^2 - 2x + 4) = 3$ බව පෙන්වන්න.

(b) $g(x), f(x)$ සහ $h(x)$ යනු සමහරවිට a හැර a අසල වන සියලු x සඳහා

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ සහ } \lim_{x \to a} g(x) = L = \lim_{x \to a} h(x).$$

වන පරිදි වූ ශ්‍රිත තුනක් යයි ගනිමු.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\lim_{x \to 0} x^2 e^{x \cos\frac{1}{x}}$ අගයන්න.

(c) පහත සීමා අගයන්න.

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3 + 2\sin^2 x} - \sqrt{3 - 2\sin^2 x}}{x(\sqrt{2 + x} - \sqrt{2})}$ (ii) $\lim_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$.

03 (a) (i) $x = a$ හිදී f අවකල්‍ය වේනම් එවිට වමත් අවකලය $f'_-(a)$ සහ දකුණත් අවකලය $f'_+(a)$ පවතින බව හා

$$f'_-(a) = f'_+(a) = f(a).$$

බව පෙන්වීමට $\varepsilon - \delta$ අර්ථ දැක්වීම භාවිතා කරන්න.

(ii) $x = 1$ හිදී

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x < 1 \\ ax + b & x \ge 1 \end{cases}$$

අවකල්‍ය වන පරිදි a හි අගය සොයන්න.

(b) $x = a$ හිදී

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)\sin\dfrac{1}{x-a} & x \ne a \\ kx + 3a & x = a \end{cases}$$

ශ්‍රිතය සන්තතික වන පරිදි k හි අගය සොයන්න.

04 රෝලේගේ ප්‍රමේය ප්‍රකාශකර එය භාවිතයෙන් මධ්‍යන්‍ය අගය ප්‍රමේය සාධනය කරන්න.

(i) $f(x) = \sqrt{x}\ ; x > 0$ ශ්‍රිතය සඳහා $[n, n+1]$ තුල මධ්‍යන්‍ය අගය ප්‍රමේය භාවිතා කර සියලු ධන පූර්ණ n සඳහා

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

බව පෙන්වන්න. එනයින් $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) $f(x) = \tan^{-1}x$ ශ්‍රිතය සඳහා $[a, b]$ තුල මධ්‍යන්‍ය අගය ප්‍රමේය භාවිතා කර

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1}b - \tan^{-1}a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

බව පෙන්වන්න.

(iii) සියලු සඳහා $x \in \mathrm{R}$

$$\tan^{-1}(x) + \cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

බව ඔප්පු කරන්න.

05 $y = f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$ යයි ගනිමු.

(i) f හි අවධි ලක්ෂ්‍ය සහ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය සොයන්න.

(ii) f හි අවධි ලක්ෂ්‍ය වර්ගීකරණය කිරීමට දෙවන අවකලන සංගුණක පරීක්ෂාව යොදා ගන්න.

(iii) ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්ථාරය ඒකවිධ ලෙස වැඩිවන, අඩුවන, උඩත් උත්තල සහ යටත් උත්තල වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

(iv) f හි සිරස් සහ තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ පවතීනම් ඒවා සොයන්න.

(v) x- හා y-අන්ත: ඛණ්ඩ සහ f හි ප්‍රස්ථාරයේ දෙකෙලවර හැසිරීම නිර්ණය කරන්න.

(vi) f හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

06. (a) $a \le x \le b$ හි සන්තතික $y = f(x)$ සහ $y = g(x)$ ශ්‍රිතයන්හි ප්‍රස්තාර වලින් වටවූ පෙදෙස y-අක්ෂය වටා භ්‍රමණය කිරීමෙන් සෑදුන ඝනයෙහි පරිමාව, සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$V = \int_a^b 2\pi\, x\ (f(x) - g(x))dx$$

බව පෙන්වන්න.

$y = x(5-x)$ සහ $y = 8 - x(5-x)$ ප්‍රස්තාර වලින් වටවූ පෙදෙස x-අක්ෂය වටා භ්‍රමණය කෙරේ. අදාල ඝනයෙහි පරිමාව සොයන්න.

(b) $f(x) = x^2 + 2$ සහ $g(x) = 2x + 5$ ප්‍රස්තාර දෙක මගින් වටවූ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

07. (a) (i) $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)$, n is odd.

බව පෙන්වන්න.

(b) පහත අනුකල අගයන්න:

(i) $\int (\ln x)^3\, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, dx$