කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ප්‍රථම පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2015

2020 පෙබරවාරි - අප්‍රේල්

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය

උසස් කලනය - **PMAT – E1035**

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : අට (08) යි. පිටු ගණන : තුන(03)යි කාලය : පැය තුන(03) යි

ප්‍රශ්න(06) කට පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න 01

(a) ඒකවිධ ලෙස අඩුවන පහළින් පර්යන්තගත සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක් අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න.

සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක්

$$s_{n+1} = \frac{s_n + 2}{5}; \; n \in \mathrm{N}, s_1 = 1,$$

සහානුයාත සම්බන්ධය මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

(i) $\frac{1}{2} < s_n < 1$ බව

(ii) s_n ඒකවිධ ලෙස අඩුවන බව

පෙන්වන්න.

s_n අනුක්‍රමය අභිසාරී බව පෙන්වා $\lim_{n\to\infty} s_n$ සොයන්න.

(b) සීමා පිළිබඳ ප්‍රමේයන් භාවිතයෙන් පහත සීමා අගයන්න.

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n} - 2n\right)$ (ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

සම්බන්ධිතයි ...

ප්‍රශ්ණ 02

(a) ශ්‍රිතයක සීමාව පිළිබඳ $\varepsilon - \delta$ මූලික අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $\lim_{x\to 2}(x^2 - 4x + 5) = 1$ බව පෙන්වන්න.

(b) (i) f ශ්‍රිතයක් $x = a$ හි දී සන්තතික වේ යන්නෙන් අදහස් කරන්නේ කුමක් ද?

(ii) f යනු $x = 0$ හි දී සන්තතික ශ්‍රිතයක් හා $f(0) = 0$ යයි ගනිමු.

$xf(x)$ ශ්‍රිතය $x = 0$ හි දී අවකලනය බව පෙන්වන්න.

(iii) $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 e^{\sin\frac{1}{x-2}} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$,

මගින් අර්ථ දැක්වෙන ශ්‍රිතය $x = 2$ හි දී සන්තතික හා අවකලනය බව පෙන්වන්න.

(c) පහත සීමා ඇගයීම සඳහා ල’හොපිටාල්ගේ නීතිය භාවිතා කරන්න.

(i) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2\sin x}{x\sin x}$

(ii) $\lim_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}$.

ප්‍රශ්ණ 03

(a) සන්තතික හා අවකලනය ශ්‍රිත සඳහා වන රෝලේගේ ප්‍රමේය ප්‍රකාශකර එය භාවිතයෙන් මධ්‍යන අගය ප්‍රමේය සාධනය කරන්න.

සුදුසු ශ්‍රිතයක් සඳහා මධ්‍යන අගය ප්‍රමේය භාවිතයෙන්

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} < \frac{y - x}{2\sqrt{x}} \quad 0 < x < y$$

බව පෙන්වන්න.

(b) සියලු $x \in \mathrm{R}$ සඳහා $\tan^{-1}(x) + \cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

ප්‍රශ්ණ 04

$y = f(x) = 15x^3 - x^5$ මගින් දෙනු ලබන ශ්‍රිතය සලකන්න.

f ශ්‍රිතයේ

(i) අපූර්වතා ලක්ෂ්‍ය සොයන්න.

(ii) අපූර්වතා ලක්ෂ්‍ය සාපේක්ෂ උපරිම, සාපේක්ෂ අවම සහ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය ලෙස වර්ගීකරණය සඳහා දෙවන අවකලන සංගුණක පරීක්ෂාව යොදාගන්න.

(iii) ප්‍රස්ථාරය ඒකවිධ ලෙස වැඩිවන, ඒකවිධ ලෙස අඩු වන, උඩත් උත්තල සහ යටත් උත්තල වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

(iv) තිරස් සහ සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ පවතීනම් ඒවා සොයන්න.

(v) x සහ y අන්තඛණ්ඩ සහ සීමා හැසිරීම නිර්ණය කරන්න.

(vi) දළ සටහනක් ඇඳීම සඳහා ඉහත තොරතුරු භාවිතා කරන්න.

සම්බන්ධිතයි ...

ප්‍රශ්න 05

(a) $y = x^2, y = (x-2)^2$ සහ $y = 0$ වක්‍ර මගින් වටවූ කලාපයේ ක්ෂේත්‍රඵලය සොයන්න.

(b) $y = -x^2 + 2x$ සහ $y = 0$ වක්‍ර මගින් වටවූ කලාපය y-අක්ෂය වටා පරිභ්‍රමණය කරනු ලැබේ. සිලින්ඩරාකාර කුහර ක්‍රමය භාවිතයෙන් ඵලිත ඝනයේ පරිමාව සොයන්න.

ප්‍රශ්න 06

(a) පහත අනුකල අගයන්න.

(i) $\int \sec^5 2x \tan^4 2x \; dx$ (ii) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx$ (iii) $\int \tan^{-1} 3x \; dx$

(b) පහත ඌනිත සූත්‍ර ලබා ගන්න.

(i) $\int \sec^n x \; dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \; dx.$

(ii) $\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$

එනයින් $\int \sec^5 x \; dx$ සහ $\int (\ln x)^3 \, dx$අගයන්න.

ප්‍රශ්න 07

(a)

$$\frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \, dx - \left(\frac{x}{y} \sin \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}\right) dy = 0$$

පළමු ගණයේ ඒකජ අවකල සමීකරණය සමජාතීය බව පෙන්වා එය විසඳීමට $y = vx$ ආදේශය භාවිතා කරන්න.

(c) පහත අවකල සමීකරණය සපිරි වන්නේදැයි පරීක්ෂා කර එසේ නොවන අවස්ථාවල අවකල සමීකරණය සපිරි බවට පත් කිරීම සඳහා සුදුසු අනුකල සාධක සොයා ඒවා විසඳන්න.

(i) $(y \cos x + 2x \, e^y) dx + (\sin x + x^2 e^y - 1) dy = 0$

(ii) $(3xy + y^2) + (x^2 + xy) \frac{dy}{dx} = 0$

ප්‍රශ්න 08

පහත දැක්වෙන පළමු ගණයේ ඒකජ අවකල සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $(x^2 + y \cos x) dx + (y^3 + \sin x) dy = 0.$

(ii) $x \frac{dy}{dx} + y = x \sin x$

(iii) $x \frac{dy}{dx} + 5y = 2x^2 y^4$

Λ