කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ප්‍රථම පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2012/13

2015 දෙසැම්බර් - 2016 පෙබරවාරි

ශුද්ධ ගණිතය **Pure Mathematics PMAT – 1035**

විවික්ත ගණිතය - **Discrete Mathematics I**

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : අටයි. (08) පිටු සංඛ්‍යාව : හතරයි. 04යි කාලය : පැය තුනයි. (03)

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. A හා B යනු $\mathbb{R}$ හි නොහිස් සපර්යන්ත උපකුලක දෙකක් යැයි ගනිමු.

   (a) $\sup A$ හා $\inf B$ අර්ථ දක්වන්න.

   (b) $A \subseteq B$ නම් $\sup A \leq \sup B$ බවත් $\inf A \geq \inf B$ බවත් සාධනය කරන්න.

   c යනු ධන තාත්වික සංඛ්‍යාවක් යැයි ද $cA = \{ca : a \in A\}$ පරිදි cA කුලකය අර්ථ දැක්වේ යැයි ද ගනිමු.

   (c) $\sup cA = c \sup A$ බව සාධනය කරන්න.

   $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ පරිදි AB කුලකය අර්ථ දැක්වේ.

   (d) A හා B හි ධන තාත්වික සංඛ්‍යා පමණක් අඩංගු නම්, $\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$ බව සාධනය කරන්න.

2. (a) අනුක්‍රමයක සීමාවේ අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන්,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3+n^2}=0$$

බව සාධනය කරන්න.

(b) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ අනුක්‍රමය, $a_1=\frac{3}{2}$ හා, $n\geq 1$සඳහා $a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$ මගින් අර්ථ දැක්වේ.

(i) $a_n\geq 1$ බවත්

(ii) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ යනු ඒකවිධ අඩුවන අනුක්‍රමයක් බවත්

(iii) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ අනුක්‍රමය 1 ට අභිසාරී වන බවත්

සාධනය කරන්න.

3. (a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ යනු දී ඇති ශ්‍රිතයක් යැයි ද $a\in\mathbb{R}$ යැයි ද ගනිමු. $\lim_{x\to a}f(x)=l$ යන්නෙන් අදහස් වන දෑ අර්ථ දක්වන්න.

(b) f හා g යනු එක එකක වසම $X\subseteq\mathbb{R}$ වන තාත්වික අගීය ශ්‍රිත දෙකක් යැයි ගනිමු. $a\in X$ සඳහා $\lim_{x\to a}f(x)=l_1$ හා $\lim_{x\to a}g(x)=l_2$ නම් $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=l_1+l_2$ බව සාධනය කරන්න.

(c) ප්‍රථම මූලධර්ම භාවිතයෙන්, $\lim_{x\to 0}(5+2x\sin x)=5$ බව සාධනය කරන්න.

(d) පහත අර්ථ දැක්වා ඇති f ශ්‍රිතය $x=0$ දී සන්තතිකදැයි නිර්ණය කරන්න:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$

4. (a) රෝලේ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

(b) මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර, රෝලේ ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් එය සාධනය කරන්න.

(c) $x^3 + \sin 2x + 3x - 1 = 0$ සමීකරණයට එක් මූලයක් පමණක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(d) පහත දැක්වෙන එක් එක් සීමාව පවතී නම් සොයන්න:

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}$ (ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$

5. (a) $y = \ln(\sec x)$ වක්‍රයෙහි $x = 0$ සිට $x = \frac{\pi}{3}$ දක්වා වූ චාප කොටසෙහි දිග සොයන්න.

(b) $y = e^{x^2}$ වක්‍රයෙනුත් $y = x$, $x = 0$ හා $x = 1$ රේඛා වලිනුත් පර්යන්තගත වූ පෙදෙස R ලෙස ගනිමු.

(i) R පෙදෙස දළ රූපසටහනකින් දක්වන්න.

(ii) R පෙදෙස y-අක්ෂය වටා 360° කින් පරිභ්‍රමණය කල හොත් ජනනය වන ඝණයේ පරිමාව, සිලින්ඩරාකාර කුහර ක්‍රමය භාවිතයෙන් සොයන්න.

(iii) R පෙදෙස x-අක්ෂය වටා 360° කින් පරිභ්‍රමණය කල හොත් ජනනය වන ඝණයේ පරිමාව V නම් $\int_0^1 e^{2x^2}\,dx = \frac{1}{3} + \frac{V}{\pi}$ බව පෙන්වන්න.

6. (a) පහත දැක්වෙන එක් එක් අනුකලය අගයන්න:

(i) $\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{4}{5}} \frac{\sqrt{25x^2-4}}{x}\,dx$ (ii) $\int_0^{\pi} \frac{1}{3+2\sin x+\cos x}\,dx$

(b) $I_n = \int x^n\sqrt{a-x}\,dx$ නම් $(2n+3)I_n = 2anI_{n-1} - 2x^n(a-x)^{\frac{3}{2}}$ බව පෙන්වා, එනයින් $\int_0^a x^2\sqrt{a-x}\,dx$ අගයන්න; මෙහි $a > 0$ වේ.

7. (a) පහත දැක්වෙන එක් එක් අවකල සමීකරණය විසඳන්න:

(i) $x\frac{dy}{dx} = \tan y \ln x$ (ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-2\sqrt{xy}}$

(b) $(x^4 - 2xy^2 + y^4)\,dx = (2x^2y - 4xy^3 + \sin y)\,dy$ අවකල සමීකරණය සපිරි බව පෙන්වා එය විසඳන්න.

8. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවකල සමීකරණය විසඳන්න:

(a) $x \ln x \frac{dy}{dx} + y = 2 \ln x$

(b) $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = x^2 y$

(c) $\frac{dy}{dx} = y \tan x - y^2 \sec x$

———————— // ————————