කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ප්‍රථම පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2012/13

2015 දෙසැම්බර් - 2016 පෙබරවාරි

ව්‍යවහාරික ගණිතය

**යාන්ත්‍රිකය I - AMAT E - 1025**

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. කාලය පැය : 03 යි

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව 08 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 04 යි

---

1. අ) සුපුරුදු අංකනයෙන් $r = f(\theta)$ තල වක්‍රයක ගමන් කරන අංශුවක් සඳහා එහි ත්වරණයෙහි අරීය සහ තීර්යක් සංරචක, $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $\left(\frac{1}{r}d\left(r^2\dot{\theta}\right)/dt\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

   ආ) ස්කන්ධය $m$ වූ $P$ අංශුවක් දිග $l$ වූ ලුහු අප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක් මගින් $O$ අචල ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත.තන්තුව නුබුරුල් වන අතර $OP$ යටි අත් සිරස සමග $\alpha < \left[\frac{\pi}{2}\right]$ කෝණයක් සාදන සේ නිසලව තබාගෙන ඇත. අංශුවට $u$ ප්‍රවේගයක් තිරස්ව දෙනු ලැබේ නම්, $OP$ යටි අත් සිරස සමග $\theta$ කෝණයක් සාදන විට සුපුරුදු අංකනයෙන්,

$$l^2\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) - 2lgcos\theta = u^2 - lgcos\alpha \text{ හා } lsin^2\theta\dot{\phi} = usin\alpha$$ බව පෙන්වන්න.

   එනයින් $l^2\dot{\theta}^2 = (cos\alpha - cos\theta)\left[\frac{u^2(cos\alpha+cos\theta)}{sin^2\theta} - 2lg\right]$ බව පෙන්වන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

2. අ) සුපුරුදු අංකනයෙන් ඒකක ස්කන්ධයකට $P$ කේන්ද්‍රික බලයක් යටතේ චලනයවන අංශුවක පථය සඳහා

$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}$ අවකල සමීකරණය ලබා ගන්න.

ආ) දිග $a$ වූ අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචලව ගැටගසා. අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය $m$ වූ අංශුවක් ගැට ගසා තන්තුව සිරස් වන සේ පද්ධතිය නිසලව තබනු ලැබේ. අංශුවට යාන්තමින් වටයක් සම්පූර්ණ වන සේ $u$ තිරස් ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ. $u^2 = 5ga$ බව සහ අංශුව එහි පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇති විට තන්තුවේ ආතතිය $6mg$ වන බව පෙන්වන්න.

3. $O$ එකම මූලය සහිත සමුද්දේශ රාමු දෙකක් එකිනෙක අනුබද්ධයෙන් $\underline{\omega}$ කෝණික ප්‍රවේගයකින් භ්‍රමණය වේ. සුපුරුදු අංකනයෙන්, ඕනෑම $\underline{X}$ දෛශිකයක් සඳහා $\frac{d\underline{X}}{dt} = \frac{\partial \underline{X}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge \underline{X}$ නම්, රාමු දෙකෙහි දී අංශුවෙහි ත්වරණ අතර සම්බන්ධතාවය $\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} + \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} \wedge \underline{r} + 2\underline{\omega} \wedge \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \times \underline{r})$

ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ වේ.

මෙහි $\underline{\Omega}$ යනු පෘථිවියේ කෝණික ප්‍රවේගය නම් සුපුරුදු අංකනයෙන් පෘථිවි පෘෂ්ඨය ආසන්නයෙහි අංශුවක චලිතය, $|\underline{\Omega}|^2$ ගණයේ පද නොසලකා හරිමින් $\frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} + 2\underline{\Omega} \wedge \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} = \underline{g}$ මගින් විස්තර කළහැකි පෙන්වන්න.

එනයින් $\frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} + 2\underline{\Omega} \wedge \underline{g}t + 2\underline{\Omega} \wedge \underline{A} = \underline{g}$ සහ $\underline{r} = \frac{-\underline{\Omega} \wedge \underline{g}t^3}{3} - \underline{\Omega} \wedge \underline{A}t^2 + \frac{1}{2}\underline{g}t^2 + \underline{B}t + \underline{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\underline{A}, \underline{B}$ සහ $\underline{C}$ යනු නියත දෛශික වේ.

ස්කන්ධය $m$ වූ අංශුවක් ආරම්භයේ දී පෘථිවි පෘෂ්ඨයේ සිට $h$ උසකින් නිසලව මුදා හරිනු ලැබේ. පෘථිවි අක්ෂය වටා එහි කෝණික ප්‍රවේගය $\omega$ නියත බව උපකල්පනය කරමින් $t$ කාලයකට පසු අංශුව ආරම්භක සිරස් අක්ෂයේ $\frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\lambda$ දුරකින් නැගෙනහිර දෙසට උත්ක්‍රමණය වන බව පෙන්වන්න.

4. ඇ) ස්කන්ධය $M$ හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙලවරක් හරහා දණ්ඩට ලම්බක වූ අක්ෂයක් වටා අවස්ථිති

ඝූර්ණය සොයන්න.

ආ) දිග $2a$ හා ස්කන්ධය $m$ වූ ඒකාකාර $AB$ දණ්ඩකට $AC = x(< a)$ වන ලෙස දණ්ඩ මත වූ $C$ ලක්ෂ්‍යයක් වටා
සිරස් තලයක නිදහසේ භ්‍රමණයවීමට හැකි ය. $C$ වටා දණ්ඩෙහි අවස්ථිති ඝූර්ණය සොයන්න. දණ්ඩ තිරස් පිහිටුමක සිට
නිසලතාවෙන් මුදා හැරේ නම්, $C$ වටා දණ්ඩ මත ක්‍රියාකරන බල වල ඝූර්ණ ගැනීමෙන් හා එසේ ලබාගන්නා සමීකරණ
අනුකලනය කිරීමෙන්, තදනන්තර චලිතයේදී $\dot{\theta}^2 = \dfrac{6g(a-x)\sin\theta}{a^2+3(a-x)^2}$ බවපෙන්වන්න; මෙහි $\theta$ යනු දණ්ඩ හා තිරස
අතර කෝණය වෙයි.

5. ඇ) "$S_1$ සහ $S_2$ පද්ධති දෙකක් සමඝූර්ණ වේ " යන ප්‍රකාශනයෙන් අදහස් කෙරෙන්නේ කුමක්දැයි පැහැදිලිව

ප්‍රකාශ කරන්න.

ආ) පද්ධති දෙකක් සමඝූර්ණ වීම සඳහා අනිවාර්ය සහ ප්‍රමාණවත් අවශ්‍යතා කුලකයක් ප්‍රකාශකර සාධනය කරන්න.

ඇ) $ABCD$ යනු ස්කන්ධය $M$ වූ ඒකාකාර සමාන්තරාස්‍රයකි. සමාන්තරාස්‍රය, එහි පාදයන් හි මධ්‍ය ලක්ෂවල තබන ලද
ස්කන්ධය $\dfrac{M}{6}$ වූ අංශු හතරක් සහ විකර්ණ ඡේදනය වන ලක්ෂයේ තබන ලද ස්කන්ධය $\dfrac{M}{3}$ වූ අංශුවක් ද සහිත
පද්ධතියක් සමග සමඝූර්ණ වන බව පෙන්වන්න.

6. ඇ) සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underline{r} \wedge \underline{F}$ බව පෙන්වන්න.

ආ) ස්කන්ධය $M$ සහ අරය $a$ වූ වෘතාකාර ආස්තරයක එයට ලම්බව කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරන අක්ෂයක් වටා

අවස්ථිති ඝූර්ණය සොයන්න.

ඇ) බර $W$ සහ අරය $a$ වූ වෘතාකාර ආස්තරයක් එහි පරිධියෙහි වූ $O$ හරහා ගමන් කරන ආස්තරයේ

තලයට ලම්බ වූ අක්ෂයක් වටා භ්‍රමණයවීමට නිදහස්ය. එහි විෂ්කම්භය $O$ ට ඉහලින් සිරස්ව තබා යාන්තමින් චලනය ලැබේ. විෂ්කම්භය $\theta$ කෝණයකින් ආනත වූ විට විෂ්කම්භය ඔස්සේ සහ එයට ලම්බ වූ ප්‍රතික්‍රියා පිළිවෙලින් $\frac{W(7cos\theta-3)}{3}$ සහ $\frac{W(sin\theta)}{3}$ වන බව පෙන්වන්න.

7. ඇ) සුපුරුදු අංකනයෙන් $Ox, Oy$ ලම්බ අක්ෂ අනුබද්ධයෙන් තල ආස්තරයක් සඳහා $I_{Ox}=A, I_{Oy}=B$, සහ $I_{xy}=H$ වේ. ආස්තරය අඩංගු තලයේ වූ $y=x\tan\theta$ රේඛාව වටා එහි අවස්ථිති ඝූර්ණය $I$ සඳහා පහත සූත්‍රය ලබා ගන්න.

ආ) ඉහත ආස්තරයේ ප්‍රධාන අක්ෂ $x-$ අක්ෂයට $\theta$ කෝණයකින් ආනත නම් එවිට $\tan 2\theta = \frac{2H}{B-A}$ බව පෙන්වන්න.

ඇ) ඒකාකාර අර්ධ වෘතාකාර ආස්තරයක් පර්යන්තගත විෂ්කම්භය කෙළවරක දී ප්‍රධාන අක්ෂ එයට $\frac{1}{2}tan^{-1}(\frac{8}{3\pi})$ කෝණයකින් ආනත වන බව පෙන්වන්න.

8. ඇ) ස්කන්ධය $M$ සහ අරය $a$ වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලයක එහි විෂ්කම්භයක් වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය සොයන්න.

ආ) සුපුරුදු අංකනයෙන් අචල තලයකට සමාන්තරව චලනය වන දෘඩ වස්තුවක චාලක ශක්තිය

$$T=\frac{1}{2}MV_G^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඇ) තිරස් සුමට මේසයක් මත සරල රේඛාවක් ඔස්සේ ලිස්සීමෙන් තොරව පෙරලෙමින් චලනයවන ස්කන්ධය $M$ සහ අරය

$a$ වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයෙහි ප්‍රවේගය $v$ මගින් දෙනු ලැබේ. ගෝලයේ මුළු චාලක ශක්තිය $\left(\frac{7}{10}\right)Mv^2$ බව පෙන්වන්න.