කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය -ශ්‍රී ලංකාව

University of Kelaniya-Sri Lanka

බාහිරවිභාග අංශය

External Examinations Branch

විද්‍යා පීඨය - **Faculty of Science**

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ප්‍රථම පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2008

2010 ඔක්තෝබර්

Bachelor of Science (General) Degree First Examination (External) 2008

October -2010

සංඛ්‍යානය හා පරිගනක විද්‍යාව - **STCS E 1015**

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව: අටයි (08) පිටු සංඛ්‍යාව : හතරයි (04) කාලය : පැය (03) තුනයි

ප්‍රශ්න <u>06 කට පමණක්</u> පිළිතුරු සපයන්න.

---

1 (a) (i) A සහ B යන ඕනෑම සිද්ධීන් දෙකක් සඳහා

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$ බව සාධනය කරන්න.

මෙම ප්‍රතිඵලය A, B සහ C යන ඕනෑම සිද්ධීන් තුනක් සඳහා විස්තීරනය කරන්න.

(ii) පුද්ගලයකු දන්ත වෛද්‍යවරයකු හමුවී ඔහුගේ දත් පිරිසිදු කර ගැනීමේ, කුහරයක් පුරවාගැනීමේ සහ දතක එනමලය (enamel) ඉවත් කරගැනීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙලින් 0.44, 0.24 සහ 0.21 වේ. ඔහුගේ දත් පිරිසිදු කරගැනීමේ සහ කුහරයක් පුරවාගැනීමේ ද, දත් පිරිසිදු කිරීමේ සහ එනමලය ඉවත් කරගැනීමේ ද, කුහරයක් පිරවීමේ සහ එනමලය ඉවත් කරගැනීමේ ද සම්භාවිතා පිළිවෙලින් 0.08, 0.11 සහ 0.07 වේ. ඔහුගේ දත් පිරිසිදු කිරීම, කුහරයක් පිරවීම සහ එනමලය ඉවත් කරගැනීම යන ක්‍රියාකාරකම් තුනම සිදුකරගැනීමේ සම්භාවිතාවය 0.03 වේ. එම දන්ත වෛද්‍යවරයා හමුවීමට පැමිණෙන පුද්ගලයකු මෙම ක්‍රියාකාරකම් වලින් අඩුවශයෙන් එකක්වත් සිදුකරගැනීමේ සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න.

(b) උපදේශක ආයතනයක් විසින් වාහන කුලියට සපයන A_1 සමාගමෙන් 60% ක් ද, A_2 සමාගමෙන් 30% ක් ද, A_3 සමාගමෙන් 10% ක් ද වන පරිදි මෝටර් රථ කුලියට ගනු ලබයි. A_1 සමාගමෙන් මෝටර් රථය කුලියට ගත් බව දී ඇති විට එන්ජිම සුසර කිරීමට (tune-up) අවශ්‍ය වීමේ සම්භාවිතාව 0.09 වේ. මෙම සම්භාවිතා A_2 හා A_3 සඳහා පිළිවෙලින් 0.20 හා 0.06 වෙයි. . උපදේශක සමාගම කුලියට ගත් මෝටර් රථයක එන්ජිම සුසර කිරීම අවශ්‍ය බව දී ඇත්නම් එය A_2 සමාගමෙන් කුලියට ගෙන තිබීමේ සම්භාවිතාව ගණනය කරන්න.

2 (a) (i) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ද්විපද ව්‍යාප්තියක් සඳහා සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිතය ලියා දක්වන්න.

(ii) ඉහත ද්විපද ව්‍යාප්තියේ ඝූර්ණ ජනන ශ්‍රිතය නිර්ණය කරන්න. ඒ නයින්, ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.

(b) යන්ත්‍රයක් නියමාකාරයෙන් ක්‍රියාකරන විට එයින් නිපදවන ලද කොටස් වලින් 3% ක් දෝෂ සහිත වෙයි. මෙම යන්ත්‍රය මගින් නිපදවන ලද කොටස් 12 ක සසම්භාවී නියැදියක් දෝෂ සඳහා නිරීක්ෂණය කරන ලදී. මෙම අවස්ථාව ද්විපද ව්‍යාප්තියක් ලෙස ආදර්ශය කරන්න.

ඒ නයින්,

(i) තෝරාගත් නියැදියේ දෝෂ සහිත කොටස් එකකට වැඩියෙන්,

(ii) එවැනි නියදි දෙකකින් එක එකක දෝෂ සහිත කොටස් එකකට වැඩියෙන්,

තිබීමේ සම්භාවිතාවය ආගණනය කරන්න.

3 (a) (i) සුපුරුදු අංකනයෙන්, පරාමිති μ සහ σ වන ප්‍රමත ව්‍යාප්තියක් සඳහා සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය ලියා දක්වන්න.

(ii) ඉහත දී ඇති ප්‍රමත ව්‍යාප්තිය සඳහා මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව නිර්ණය කරන්න.

මතු සම්බ

(b) එක්තරා බැංකුවක ක්‍රෙඩිට් කාඩ් (credit card) ගිණුම්වල ආපසු ගෙවීමේ කාලසීමාව පිළිබඳ දත්ත මූල්‍ය අංශය විසින් එක්රැස් කර ඇති අතර එය මධ්‍යනාය දින 28 ක් සහ සම්මත අපගමනය දින 08 ක් සහිත ප්‍රමත ව්‍යාප්තියක් යැයි උපකල්පනය කෙරේ.

(i) ආපසු ගෙවීමේ කාල සීමාව දින 20 සහ දින 40 ඇතුලත පිහිටි ගිණුම් ප්‍රතිශතය ගණනය කරන්න.

(ii) ආපසු ගෙවීමේ වැඩිතම කාල සීමාව ඇති ගිණුම් 15% සඳහා සිහි කැඳවීමේ ලිපියක් යැවීමට බැංකු පරිපාලනය සැලකිලිමත් වෙයි. සිහි කැඳවීමේ ලිපියක් ලැබීමට පෙර ගිණුමක් කොපමණ දින ගණනක් ආපසු ගෙවීමකින් තොරව තිබිය යුතුදැයි ගණනය කරන්න.

(iii) දින 22 ක් හෝ ඊට පෙර ඉතිරි මුදල ගෙවන ගිණුම් සඳහා වට්ටමක් ලබාදීමට බැංකු පරිපාලනය කැමැත්තක් දක්වයි. මෙම වට්ටම ලබාගන්නා ගිණුම් වල ප්‍රතිශතය ගණනය කරන්න.

4 (X,Y) ද්විමාන සසම්භාවී විචල්‍යයේ බද්ධ ව්‍යාප්තිය පහත සම්භාවිතා වගුව මගින් අර්ථ දක්වා ඇත:

		X		
		1	2	3
Y	2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
	3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
	4	0	$\frac{1}{3}$	0

(i) X සහ Y හි ආන්තතික සම්භාවිතා ස්කන්ධ ශ්‍රිත,

(ii) $P(X=Y)$,

(iii) $P(X=2$ හෝ $Y=4)$,

(iv) $P(X+Y\le 4)$,

(v) $E(Y\mid X=3)$,

සොයන්න.

5 X හා Y සසම්භාවී විචල්‍යයන්ට

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}8xy & ;\ 0<x<y<1\\ 0 & ;\ \text{එසේ නොවනවිට}\end{cases}$$

මගින් දෙනු ලබන $f_{X,Y}(x,y)$ බද්ධ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතයක් ඇත.

(i) X හි ආන්තික සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය,

(ii) $Y=y$ බව දී ඇති විට, X හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය,

(iii) $\Pr\left(X\le \tfrac{1}{4}\middle| Y=2/3\right)$,

(iv) $\Pr\left(X\le \tfrac{1}{2}\middle| \tfrac{1}{2}<Y<1\right)$,

සොයන්න.

මතු සම්බන්ධයි....

6 (a) (i) සහසම්බන්ධතා සංගුණකය යන්නෙන් අදහස් කරනු ලබන්නේ කවරක් දැයි අර්ථ දක්වන්න.

(ii) $U = kX$ ද, $W = kY$ නම්; මෙහි k යනු නියතයක් වේ.
U හා W හි සහසම්බන්ධතා සංගුණකයත් X හා Y හි සහසම්බන්ධතා සංගුණකයත් එකම බව පෙන්වන්න.

(b) (i) $X+Y$ සහ $X-Y$ අතර සහසම්බන්ධතාවයක් නොතිබේ නම් එවිට,
$Var(X) = Var(Y)$ බව පෙන්වන්න.

(ii) X සසම්භාවී විචල්‍යයට පහත දැක්වෙන විවික්ත සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය ඇත යැයි සිතමු:

x	-1	0	1
$P(X=x)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

$Var(X)$ ද , $Var(X^2)$ ද, X හා X^2 හි සහසම්බන්ධතා සංගුණකය ද ආගණනය කරන්න.

7 (a) X සසම්භාවී විචල්‍යයට, $0 < x < 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය සහිත $Beta(a,b)$ ව්‍යාප්තියක් ඇත; මෙහි $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ වේ.

$E(X) = \dfrac{a}{a+b}$ සහ $V(X) = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$ බව පෙන්වන්න.

(b) X හා Y යන ස්වායත්ත සසම්භාවී විචල්‍ය එක එකකට පිළිවෙලින් පරාමිති (a,α) හා (b,α) වන ගැමා ව්‍යාප්ති ඇත.

$U = \dfrac{X}{X+Y}$ සහ $V = X+Y$ යන පරිණාමන සලකන්න.

U හා V හි බද්ධ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය සොයන්න.

ඒ නයින්,

(i) U හා V ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

(ii) U හා V හි ආන්තික සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිත ලබාගන්න. එම ව්‍යාප්ති හඳුනාගන්න.

[ඉඟිය: පරාමිති (n,θ) වන ගැමා ව්‍යාප්තියක සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය $x > 0$ සඳහා
$f_X(x) = \dfrac{1}{\Gamma(n)} \theta^n x^{n-1} e^{-\theta x}$ ලෙස ඔබට උපකල්පනය කල හැකිය.]

මතු සම්බන්ධයි....

8 (a) (i) $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ යනු සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය F_X සහ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය f_X සහිත සන්තතික ව්‍යාප්තියකින් ගන්නා ලද සසම්භාවී නියැදියක් යැයි ගනිමු. n වෙනි පටිපාටි සංඛ්‍යාතිය Y_n ලෙස ගනිමු. Y_n හි සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය $g_{Y_n}(y) = n[F_X(y)]^{n-1} f_X(y)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(ii) $\{X_1, X_2, X_3\}$ යනු $f_X(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{එසේ නොවනවිට} \end{cases}$

සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය සහිත ඒකාකාර ව්‍යාප්තියකින් ලබාගත් සසම්භාවී නියැදියක් හා $Y = X_{(3)}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $X_{(3)}$ යනු 3 වෙනි පටිපාටි සංඛ්‍යාතිය වේ.

$P\left[Y > \frac{1}{4}\right] = \frac{63}{64}$ බව පෙන්වන්න.

(b) සමුච්චිත ව්‍යාප්ති ශ්‍රිතය F_X සහ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය f_X වන සංගහනයකින් ලබාගත් $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ සසම්භාවී නියැදියක $r < s$ ලෙස වූ r හා s වෙනි පටිපාටි සංඛ්‍යාති වල බද්ධ ඝනත්ව ශ්‍රිතය

$$g_{X_{(r)},X_{(s)}}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\left[F_X(x)\right]^{r-1}\left[F_X(y) - F_X(x)\right]^{s-r-1}\left[1 - F_X(y)\right]^{n-s} f_X(x).f_X(y)$$

මගින් දෙනු ලැබේ.

(0, 1) ප්‍රාන්තරය තුල වූ ඒකාකාර ව්‍යාප්තියක් සඳහා $X_{(1)}$ සහ $X_{(n)}$ හි බද්ධ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය $g_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) = n(n-1)(y-x)^{n-2}$, $0 < x < y < 1$ බව පෙන්වන්න.

----------------//----------------