කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය-ශ්‍රී ලංකාව

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) පරීක්ෂණය (බාහිර)-2017

ශුද්ධ ගණිතය - PMAT 102

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව -අටයි(08)   පිටු සංඛ්‍යාව- තුනයි (03)   කාලය- පැය තුනයි(03)

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

(1). (අ) $S = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ යැයි ගනිමු. $\inf S$ සහ $\sup S$ සොයන්න.

(ආ) $S \subseteq T \subseteq \mathbb{R}$ නම්

(i) T ඉහළින් සපර්යන්ත නම් $\sup S \leq \sup T$ බවත්

(ii) T පහළින් සපර්යන්ත නම් $\inf T \leq \inf S$ බවත්

පෙන්වන්න, මෙහි $S \neq \emptyset$ වේ.

(ඇ) තාත්ත්වික සංඛ්‍යා සඳහා වූ පරිපූර්ණතා ගුණය ප්‍රකාශ කරන්න.

$a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $a \leq b + \frac{1}{n}$ වේ නම් $a \leq b$ බව පෙන්වන්න.

(2). (අ) අනුක්‍රමණයක සීමාවේ $\varepsilon - N$ අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-5}{3n^2+7n}\right) = \frac{2}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ සහ $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ යනු සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $a_n \leq b_n \leq c_n$ පරිදි වූ තාත්ත්වික අනුක්‍රමණ සහ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$ යැයි ගනිමු.

$\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$ බව සාධනය කරන්න.

(ඇ) පහත අනුක්‍රමණ වල (s_n) සීමා අගයන්න.

(i) $s_n = \frac{1}{n \log n}$ (ii) $s_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ (iii) $s_n = \frac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

මතු සම්බන්ධයි...

(3). (අ) පහළින් පර්යන්තගත ඒකවිධ ලෙස අඩුවන අනුක්‍රම අභිසාරී බව පෙන්වන්න.

(ආ) s_n අනුක්‍රමය $s_{n+1} = \frac{1}{4-s_n}$ සහ $s_1 = 3$ ආවර්තනික ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත.

(i) සියලු $n \in \mathbb{N}$ සඳහා $1 \leq s_n \leq 3$ බවත්

(ii) (s_n) ඒකවිධ ලෙස අඩුවන බවත්

(iii) (s_n) අභිසාරී බවත්

පෙන්වන්න.

$\lim_{n\to\infty} s_n$ සොයන්න.

(4). f ශ්‍රිතය c ලක්ෂ්‍යය අඩංගු විවෘත ප්‍රාන්තරය තුල දෙවරක් අවකලා වේ. $f''(c) < 0$ නම් f හි ප්‍රස්ථාරය $P(c, f(c))$ ලක්ෂ්‍යයේදී යටි අතට අවතල බව පෙන්වන්න.

f ශ්‍රිතය $f(x) = \frac{x-4}{x^2}$ ලෙස අර්ථ දැක්වේ යැයි සිතමු.

(i) f හි අන්ත්‍යය නිර්ණය කිරීමට හැකි විටදී දෙවන අවකල පරීක්ෂාව භාවිත කරන්න.
(ii) f හි අවතලතාව සාකච්ඡා කර නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය ඇත්නම් ඒවා සොයන්න.
(iii) f හි සිරස් හා තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ තිබේ නම් ඒවා නිර්ණය කරන්න.
(iv) f හි ප්‍රස්ථාරය අඳින්න.

(5). (අ) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේණිය සලකන්න.

(i) $|x| < 1$ නම් ශ්‍රේණිය අභිසාරී බවත් $|x| \geq 1$ නම් එය අපසාරී බවත් පෙන්වන්න.

(ii) $|x| < 1$ වන අවස්ථාවේදී ශ්‍රේණියේ එකතුව $\frac{1}{1-x}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) පහත සමීකරණය තෘප්ත කරන α හි අගය සොයන්න:

$\sum_{n=2}^{\infty}(1+\alpha)^{-n} = 2.$

(ආ) පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රේණිය අභිසාරී හෝ අපසාරී වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$.

මතු සම්බන්ධයි...

(6). (අ) ප්‍රමාණවත් තරම් හේතු සපයමින් පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රේණි අභිසාරී දැයි පරික්ෂා කරන්න:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{1/n}}{n}$ (ii)` $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{2n}}$.

(ආ) ශ්‍රේණියක නිරපේක්ෂ අභිසාරීතාව හා අසම්භාව්‍ය අභිසාරීතාව අර්ථ දක්වන්න.

ප්‍රමාණවත් තරම් හේතු සපයමින්, පහත දැක්වෙන එක් එක් ශ්‍රේණිය නිරපේක්ෂ ලෙස හෝ අසම්භව්‍ය ලෙස අභිසාරී ද, අපසාරී ද යන්න නිර්ණය කරන්න.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-e^2}$ (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\tan^{-1}n}{n^2+1}$

(7). (අ) e^x සහ xe^x යනු $y''-2y'+y=0$ සමීකරණය සඳහා විසඳුම් බව පෙන්වන්න.

එනයින් $y''-2y'+y=\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$ විසඳන්න.

(ආ) $x\,dx+y\,dy=\frac{\alpha^2(x\,dy-y\,dx)}{x^2+y^2}$ සපිරි අවකල සමීකරණයක් බව පෙන්වා එහි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(ඇ) $v=\frac{y}{x}$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් $(x+y)\frac{dy}{dx}=x-y$ සමීකරණයෙහි සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(8). (අ) ලප්ලාස් පරිණාමනය භාවිතයෙන් පහත සඳහන් අවකල සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}-y=0$

(ii) $t\,\frac{d^2y}{dt^2}+(t-1)\frac{dy}{dt}-y=0$

(ආ) $t=0$ විට $x=2$ සහ $y=1$ යන ආරම්භක තත්වයන්ට යටත්ව $t\geq 0$ සඳහා පහත සඳහන් පළමු ගණයේ සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+5x+3y=e^{-t}$$

$$2\,\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+x+y=3$$

__________//__________