කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ප්‍රථම පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2012 (නව නිර්දේශය)

2015 ඔක්තෝබර්/නොවැම්බර්

ශුද්ධ ගණිතය PMAT E - 1035

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 08 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 03 යි කාලය : පැය 03 යි.

---

1) (a) $\{x \in \mathbb{R}: 1 < x < 2\}$ කුලකයට උපරිමයක් නොමැති බව පෙන්වන්න.

(b) $\mathbb{R}$ හි පහත උපකුලක සපර්යන්ත දැයි නිර්ණය කරන්න. ඔබගේ පිළිතුරු සනාථ කරන්න.

(i) $\{x : |x-5| \leq 2\}$ (ii) $\left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ (iii) $\left\{\frac{1}{x^2} : x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$

(c) $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ තාත්වික සංඛ්‍යාමය අනුක්‍රමය s තාත්වික සංඛ්‍යාවට අභිසාරී වේ යනුවෙන් අදහස් වන්නේ කුමක් දැයි අර්ථ දක්වන්න. අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් $\lim_{n \to +\infty} \frac{5n+1}{8n-7} = \frac{5}{8}$ බව සාධනය කරන්න.

2) (a) $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1}$ අගයන්න.

(c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$ සීමාව පවතී නම් එය සොයන්න.

(d) f ශ්‍රිතය

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{if } x < 2 \\ \alpha x^2 - \beta x + 3 & \text{if } 2 \leq x < 3 \\ 2x - \alpha + \beta & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$$

මගින් අර්ථ දක්වා ඇතැයි ගනිමු. $\mathbb{R}$ පිරිවසා f සන්තතික වන පරිදි වූ α සහ β අගයයන් සොයන්න.

3) (a) f ශ්‍රිතය a ලක්ෂයේ දී අවකල්‍යය වේ නම්, එවිට f, a හිදී සන්තතික බව සාධනය කරන්න.
(b) f ශ්‍රිතය

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 5 - x & \text{if } 0 < x < 4 \\ \frac{1}{5-x} & \text{if } x \geq 4 \end{cases}$$

මගින් අර්ථ දක්වා ඇතැයි ගනිමු.

(i) $f'_-(4)$ සහ $f'_+(4)$ සොයන්න.

(ii) f හි දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න.

(iii) f අසන්තතික වනුයේ කොතැනදීද?

(iv) f අවකල්‍ය නොවනුයේ කොතැනදීද?

(c) $y = (\cos x)/(2 + \sin x)$ වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශක තිරස් වනසේ වක්‍රය මත වූ ලක්ෂ්‍යයන් සොයන්න.

4) (a) $y = f(u)$ සහ $u = g(x)$ යනු f සහ g දෙවරක් අවකල්‍ය වනසේ වූ ශ්‍රිත නම්,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)\frac{d^2u}{dx^2}$$

බව පෙන්වන්න.

(b) $F(x) = f\left(xf\left(xf(x)\right)\right)$ යනු $f(1) = 2, f(2) = 3, f'(1) = 4, f'(2) = 5,$ සහ $f'(3) = 6$ පරිදි නම්, $F'(1)$ සොයන්න.

(c) $\tan(x + y) = \sin(xy)$ වක්‍රයට $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ ලක්ෂයේ දී ඇඳි ස්පර්ශක රේඛාවේ බෑවුම සොයන්න.

5) (a) f ශ්‍රිතයට a ලක්ෂයේ දී ස්ථානීය උපරිමයක් ඇති නම් සහ $f'(c)$ පවතී නම්, එවිට $f'(c) = 0$ බව සාධනය කරන්න.
(b) $[a, b]$ ප්‍රාන්තරය මත අර්ථ දැක්වුනු f ශ්‍රිතයක් සඳහා රෝලේ ගේ ප්‍රමේයය සහ මධ්‍යනාස අගය ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
(i) සියලු x අගයයන් සඳහා $3 \leq f'(x) \leq 5$ නම්, $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$, බව
සහ
(ii) $2x - 1 - \sin x = 0$ සමීකරණයට ඇත්තේ හරියටම එක තාත්ත්වික මූලයක් පමණක් බව පෙන්වන්න.

6) (a) දී ඇති කොන්දේසි සියල්ල තෘප්ත කරනු ලබන ශ්‍රිතයක දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න:

$$f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0,$$

$$x < 0 \text{ හෝ } 2 < x < 4 \text{ නම් } f'(x) > 0,$$
$$0 < x < 2 \text{ හෝ } x > 4 \text{ නම් } f'(x) < 0,$$
$$1 < x < 3 \text{ නම් } f''(x) > 0, \quad x < 1 \text{ හෝ } x > 3 \text{ නම් } f''(x) < 0.$$

(b) $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$ යයි ගනිමු.

f හි (i) තිරස් සහ සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ, (ii) වැඩිවන හෝ අඩුවන ප්‍රාන්තර, (iii) ස්ථානීය උපරිම සහ අවම අගයයන්, සහ (iv) අවකලතා ප්‍රාන්තර සහ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යන් සොයන්න.

ඉහත විස්තර භාවිතා කරමින් f හි දළ ප්‍රස්තාරයක් අඳින්න.

7) (a) පහත සීමා සොයන්න:

(i) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2}{x^3}$ (iii) $\lim_{x \to 0^+} (4x+1)^{\cot x}$

(b) කලනයේ මූලික ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

$$f \text{ ශ්‍රිතය } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{if } 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

මගින් අර්ථ දක්වා ඇතැයි ද g ශ්‍රිතය $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ මගින් අර්ථ දක්වා ඇතැයි ද ගනිමු.

(i) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g(x)$ හට ප්‍රකාශනයක් සොයන්න.

(ii) g ශ්‍රිතය අවකල්‍ය වනුයේ කොතැනදීද?

8) (a) $y = \cos x, x = 0$ සහ $x = \frac{\pi}{2}$ වක්‍ර මගින් පර්යන්තගත වූ පෙදෙසෙහි වර්ග ඵලය සොයන්න.

(b) $y = x$ සහ $y = x^2$ වක්‍ර මගින් වට වුනු R පෙදෙස සලකන්න. R පෙදෙස

(i) x – අක්ෂය, සහ (ii) $x = -1$ රේඛාව

වටා භ්‍රමනය කිරීමෙන් ලැබෙන ඝන වස්තුවේ පරිමාව සොයන්න.

(c) $y = x - x^2$ සහ $y = 0$ වක්‍ර මගින් පර්යන්තගත වූ පෙදෙස $x = 2$ රේඛාව වටා භ්‍රමනය කිරීමෙන් ලැබෙන ඝන වස්තුවේ පරිමාව සොයන්න.

========== // ==========