කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ප්‍රථම පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2009 (පැරණි නිර්දේශය)
2013 ජූලි

විද්‍යා පීඨය

ශුද්ධ ගණිතය - **PMAT 102**

<u>ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.</u>

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 08 යි. පිටු සංඛ්‍යාව : 04 යි කාලය : පැය 03 යි.

---

1. (අ) $S = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ලෙස ගනිමු. $\inf S$ සහ $\operatorname{Sup} S$ සොයන්න.

(ආ) S හා T යනු පහත ගුණාංගය සහිත $\mathbb{R}$ හි නොහිස් උපකුලක යයි ගනිමු. සියළු $s \in S$, සියළු $t \in T$ සඳහා $s \le t$ වේ.

(i) S කුලකය ඉහළින් පර්යන්තගත සහ T කුලකය පහළින් පර්යන්තගත යැයි පෙන්වන්න.

(ii) $\operatorname{Sup} S \le \inf T$ බව සාධනය කරන්න.

(iii) ඉහත (ii) හි ප්‍රතිඵලය තෘප්ත වන පරිදි හා $S \cap T$ නිශ්ශූන්‍ය වන පරිදි S හා T සඳහා උදාහරණ දෙන්න.

(iv) $\operatorname{Sup} S = \inf T$ සහ $S \cap T = \emptyset$ තෘප්ත වන පරිදි S සහ T සඳහා උදාහරණ දෙන්න.

(ඇ) $\varepsilon - \delta$ අර්ථ දැක්වීම භාවිතයෙන් පහත සීමාව සාධනය කරන්න.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+3n}{n^3-6} = 4$$

2. (අ) පහත සීමා සොයන්න.

i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-1}}$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

මතුසම්බන්ධයි...

(ආ) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ශ්‍රිතය පහත පරිදි අර්ථ දක්වා ඇත.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & , x\le 1 \\ ax+b & , x>1 \end{cases}$$

$f(2)=1$ සහ $\lim_{x-1} f(x)$ පවතින පරිදි, a හා b අගයන් නිර්ණය කරන්න.

(ඇ) පහත කුලක සඳහා $f(x)=\frac{1}{x^2}$ යන ශ්‍රිතයෙහි ඒකාකාර සන්තතිකතාව සාකච්ඡා කරන්න.

i) $[a,\infty)$, මෙහි $a>0$

ii) $(0,1)$

3. (අ) (S_n) යනු සියළු $n\in\mathbb{N}$ සඳහා, $S_n\neq 0$ පරිදි වූ තාත්වික සංඛ්‍යාවලින් යුතු අභිසාරී අනුක්‍රමයක් යයි ද $\lim_{n\to\infty} S_n=s\neq 0$ යයි ද ගනිමු.

$\inf\{|S_n| : n\in\mathbb{N}\}>0$ බව සාධනය කරන්න.

(ආ) (s_n) අනුක්‍රමය s ට ද (t_n) අනුක්‍රමය t ට ද අභිසාරී වේ නම් (s_nt_n), st ට අභිසාරී වන බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $a_n=(-1)^n n$ අනුක්‍රමය අභිසාරී නොවන බව පෙන්වන්න.

4. α අඩංගු වන විවෘත ප්‍රාන්තරයක් මත f ශ්‍රිතය දෙවරක් අවකල්‍ය වේ. $f''(\alpha)>0$ නම් $P(\alpha,f(\alpha))$ ලක්ෂ්‍යයේදී f හි ප්‍රස්ථාරය උඩත් උත්තල වන බව පෙන්වන්න.

ශ්‍රිතයක් $f(x)=\frac{x^2}{(x+2)^2}$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇතැයි සිතමු.

(i) දෙවන අවකලන සංගුණක පරීක්ෂාව යෙදිය හැකි විටදී එය යොදා ගනිමින් f හි ස්ථානීය උපරිම සහ අවම සොයන්න.

(ii) f හි උත්තලතාව සාකච්ඡා කර නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය පවතී නම් ඒවා සොයන්න.

(iii) තිරස් හා සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ පවතී නම් ඒවා සොයන්න.

(iv) f හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

පිටුපසම්බන්ධයි...

5. (අ) ආංශික ඓක්‍යයන් සැලකීමෙන් $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව සාධනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(ආ) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ අභිසාරී ශ්‍රේණියක් නම් $\lim_{k\to\infty}a_k = 0$ බව පෙන්වන්න. එනයින් $\sum_{k=1}^{\infty}k\sin\frac{1}{k}$ ශ්‍රිතයේ අභිසාරිතාව සාකච්ඡා කරන්න.

(ඇ) ශ්‍රේණියක නිරපේක්ෂ අභිසාරිතාවය සහ අසම්භව්‍ය අභිසාරිතාවය යන පද පහදන්න.

$\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ශ්‍රේණිය සඳහා නිරපේක්ෂ අභිසාරිතාවය හෝ අසම්භව්‍ය අභිසාරිතාවය පරීක්ෂා කරන්න.

6. (අ) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ යනු, $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = l < 1$ වන පරිදි වූ ධන පද සහිත ශ්‍රේණියක් යයි ගනිමු. $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ අභිසාරී බව පෙන්වන්න.

(ආ) භාවිතා කරන ප්‍රතිඵල පැහැදිලිව දක්වමින් පහත සඳහන් එක් එක් ශ්‍රේණියේ අභිසාරිතාව පරීක්ෂා කරන්න.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\exp(-n^2)$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^3}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n+3}{3n^4+n^2-2}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

7. (අ) e^x සහ xe^x යනු $y'' - 2y' + y = 0$ සමීකරණය සඳහා විසඳුම් බව පෙන්වන්න.

එනයින් $y'' - 2y' + y = \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$ විසඳන්න.

(ආ) පහත සඳහන් පළමු ගණයේ සාමාන්‍ය අවකල සමීකරණ විසඳන්න.

(i) $(x+1)\frac{dy}{dx} = (x+1)\sin x - y$

මතුසම්බන්ධයි...

(ii) $\frac{dy}{dx} - 2y^2 = xy^2, y(0) = 1.$ තවද විසඳුමේ අවම අගය ලබා ගන්නා ස්ථානය සොයන්න.

(iii) $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0$ සමීකරණය සපිරි බව පෙන්වා එනයින් විසඳන්න.

8. (අ) $e^{\alpha t}, \cos \alpha t, \sin \alpha t$ සඳහා ලප්ලාස් පරිණාමන සොයන්න. මෙහි α යනු දී ඇති සංඛ්‍යාවකි.

(ආ) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 3e^{-t}\sin t,\ y(0) = 0, y'(0) = 3$ යන ආරම්භක අගීය ගැටළුව විසඳීමට ලප්ලාස් පරිණාමන භාවිතා කරන්න.

(ඇ) $x(0) = 0$ සහ $\frac{dx}{dt}(0) = \frac{dy}{dt}(0)$ තත්ත්ව යටතේ පහත සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x + 5\frac{dy}{dt} = t$$

$$-2\frac{dx}{dt} + 5\frac{d^2y}{dt^2} - 4y = -2$$

__________//__________