කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය -ශ්‍රී ලංකාව

University of Kelaniya-Sri Lanka

බාහිරවිභාග අංශය

External Examinations Branch

විද්‍යා පීඨය - **Faculty of Science**

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ප්‍රථම පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2008 හා 2009

2010 ඔක්තෝබර්

Bachelor of Science (General) Degree First Examination (External) 2008 & 2009

October -2010

ශුද්ධ ගණිතය E1025

PMAT E1025 – විවික්ත ගණිතය I

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව: අටයි (08) පිටු සංඛ්‍යාව: පහයි (05) කාලය: පැය තුනයි (03)

ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (අ) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ සහ $B \subseteq C$ බව කුලක වල මූලික ගුණාංග භාවිතයෙන් පෙන්වන්න.

(ආ) A, B, C, X, Y යනු U, සාර්වත්‍ර කුලකයක උප කුලක නම්, කුලක වීජය භාවිතයෙන්

i. $(A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap C \cap X \cap Y) \cup (A \cap X \cap \overline{A})$

ii. $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

සුළු කරන්න.

(ඇ) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ යන්න සෑම විටම සත්‍ය නොවන බව ප්‍රති නිදර්ශනයක් මගින් පෙන්වන්න.

(ඈ) $U = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ සහ $C = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ යැයි ගනිමු. $A \setminus B$ සහ $B \cup C$ සොයන්න.

(ඉ) $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 1\}$, යැයි ගනිමු. සියළු $\alpha \in \Lambda$ සඳහා

$$A_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{-1}{\alpha} \le x \le 1 + \alpha\right\}$$

නම්, $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ සහ $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ සොයන්න. මෙහි $\mathbb{R}$ මගින් තාත්ත්වික සංඛ්‍යා කුලකය දැක්වේ.

2. $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ යැයි ගනිමු. සියළු $(x,y),(z,t) \in X$ සඳහා $(x,y) \equiv (z,t) \Leftrightarrow xt = yz$ මඟින් X මත $\equiv$ සම්බන්ධයක් අර්ථ දක්වා ඇත.

(i) මෙය X මත තුල්‍යතා සම්බන්ධයක් බව පෙන්වන්න.

(ii) $(0,1)$ සහ $(3,3)$ හි තුල්‍යතා පන්ති සොයන්න.

(iii) $(x,y) \equiv (x',y')$ සහ $(z,t) \equiv (z',t')$ නම් $(xt + yz, yt) \equiv (x't' + y'z', y't')$ බව පෙන්වන්න.

(iv) $(x,y) \equiv (x',y')$ සහ $(z,t) \equiv (z',t')$ නම් $(xz, yt) \equiv (x'z', y't')$ බව පෙන්වන්න.

3. (අ) $f : X \to Y$ සහ $g : Y \to Z$ යනු ශ්‍රිත දෙකක් යැයි ද $h = g \circ f : X \to Z$ යැයි ද ගනිමු.

(i) f සහ g එකට-එක නම්, h ශ්‍රිතය ද එකට-එක බව

(ii) f සහ g මතට නම්, h ශ්‍රිතය ද මතට බව

(iii) f සහ g සමක්ෂේපණ (bijective) නම්, h ශ්‍රිතය ද සමක්ෂේපණයක් බව

(iv) f සහ g සමක්ෂේපණ නම්, $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ බව

පෙන්වන්න.

(ආ) (i) සියළු $x \in \mathbb{N}$ සඳහා

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 100, \text{ නම} \\ 2 & x \le 100, \text{ නම} \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 + 1.$$

ලෙස f සහ g යන ශ්‍රිත $\mathbb{N}$ සිට $\mathbb{N}$ ට අර්ථ දක්වා ඇතැයි ගනිමු.

එක් එක් ශ්‍රිතය එකට-එක සහ මතට වන්නේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

(ii) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(z) = \int_1^z \frac{dt}{t}$ නම් f එකට-එක සහ මතට ශ්‍රිතයක් බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි...

4. (අ) පහත ප්‍රස්තුතය පුනරුක්තියක් (tautology) දැයි නිර්ණය කරන්න:

$$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

(ආ) $p \wedge (q \wedge r)$ සහ $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$ තර්කානුකූලව තුල්‍ය වේදැයි නිර්ණය කරන්න.

(ඇ) ප්‍රස්තුත වීජය භාවිතයෙන් $(p \vee q) \wedge \neg p \equiv \neg p \wedge q$ බව පෙන්වන්න.

(ඈ) U = සියළු සත්ත්ව කුලකය
W(x) : x යනු අවලතාපී ය,
C(x) : x යනු වලතාපී ය,
T(x) : x ට ශීත දේශගුණයක විසීමට අපහසුවක් නැත,

යන ප්‍රස්තුත භාවිතයෙන් පහත දැක්වෙන තර්කය සංකේතාත්මකව නිරූපණය කරන්න.

සියළු ම සතුන් අවලතාපී හෝ වලතාපී වේ.
අවලතාපී සතුන්ට ශීත දේශගුණවල විසීමට අපහසුවක් නැත.
එමනිසා, ශීත දේශගුණවල විසීමට අපහසුවක් ඇත්තේ වලතාපී සතුන්ට ය.

මෙම තර්කය වලංගු බව ඔප්පු කරන්න.

5. (අ)

$$\det\begin{pmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad \text{සහ} \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & \pi & 7 \end{pmatrix} = 2$$

බව පෙන්වන්න.

(ආ) m යනු තාත්ත්වික පරාමිතියක් විට, පහත දැක්වෙන පද්ධතිය අධ්‍යයනය කරන්න.

$$x + 2my + z = 4m$$
$$2mx + y + z = 2$$
$$x + y + 2mz = 2m^2$$

m හි කුමන අගය සඳහා මෙම පද්ධතියට

මතු සම්බන්ධයි...

(i) විසඳුමක් නොමැති ද

(ii) අනන්‍ය විසඳුමක් පවතී ද

(iii) විසඳුම් අපරිමිත සංඛ්‍යාවක් පවතී ද

යන්න සාධනය සහිතව නිර්ණය කළ යුතු ය.

6. (අ) A, B, C යනු න්‍යාස වේ.

(i) $(AB)C = A(BC)$

(ii) $(B+C)A = BA + CA$

බව ඔප්පු කරන්න.

(ආ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ සමඟ න්‍යාදේශ වන සියළු $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ න්‍යාස සොයන්න.

(ඇ) A සහ B යනු උඩත් ත්‍රිකෝණික න්‍යාස යැයි සිතමු.

(i) AB ගුණිතය උඩත් ත්‍රිකෝණික බව

(ii) AB හි විකර්ණ අගයන් $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$ බව

පෙන්වන්න.

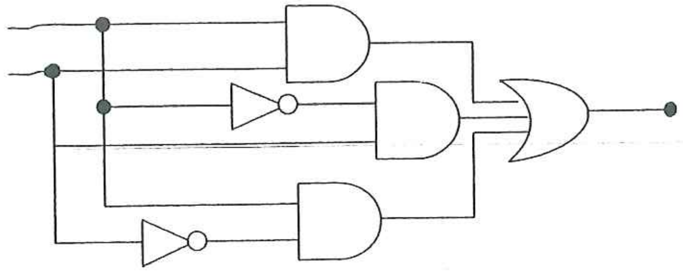
(ඈ) $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, සහ $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, නම් $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ බව සත්‍යාපනය කර

$A^n = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^n \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ බව අපෝහනය කරන්න.

7. (අ) $\overline{A}(B+C)D$ සඳහා සත්‍යතා වගුව ලියා දක්වන්න.

(ආ) $\overline{A}(A+B)+(B+AA)(A+\overline{B})$ සුළු කරන්න.

(ඇ)



(i) ඉහත පරිපථය සඳහා බූලීය ප්‍රකාශනය සොයන්න.

(ii) පරිපථය සඳහා ඉහත බූලීය ප්‍රකාශනය සුළු කරන්න.

(iii) සුළු කළ ප්‍රකාශනය සඳහා පරිපථයක් අඳින්න.

8. ෆිබොනාච්චි (Fibonacci) අනුක්‍රමය පහත දැක්වෙන පරිදි සහානුයාත (recursively) ලෙස අර්ථ දැක්වේ:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1; \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \quad n \geq 1 \text{ සඳහා.}$$

(අ) x යනු $x^2 = x + 1$ පරිදි වූ තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් $n \geq 2$ සඳහා $x^n = F_n x + F_{n-1}$ බව පෙන්වන්න.

(ආ) $x^2 = x + 1$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල α හා β මගින් දැක්වෙයි. $n \geq 2$ සඳහා $F_n = \dfrac{(\alpha^n - \beta^n)}{\alpha - \beta}$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $x^2 = x + 1$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ සහ $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වීමට වර්ගජ සූත්‍රය භාවිතා කරන්න.

(ඈ) $F_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$ බව පෙන්වන්න.

(ඉ) $n \geq 2$ සඳහා $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ බව පෙන්වීමට ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතා කරන්න.

-------------------------------------//-------------------------------------