කැලණිය විශ්ව විද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

විද්‍යා පීඨය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ප්‍රථම පරීක්ෂණය (බාහිර)- ජුනි/ජුලි 2017

2014/2015 අධ්‍යයන වර්ෂය

ව්‍යවහාරික ගණිතය

AMAT 102

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව: අටයි (08) පිටු සංඛ්‍යාව: හතරයි (04) කාලය: පැය තුනයි (03)

ප්‍රශ්න __හයකට (06)__ පමණක් පිළිතුරු සපයන්න

---

01. අ) සුපුරුදු අංකනයෙන්, $r = f(\theta)$ තල වක්‍රය මගින් චලිතය විස්තර කරන අංශුවක ත්වරණයෙහි අරීය සහ තීර්යක් සංරචක පිළිවෙලින් $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $\left(\frac{1}{r}d\left(r^2\dot{\theta}\right)/dt\right)$ ආකාරයෙන් ලබා ගන්න.

ආ) අංශුවක්, අරය a වූ වෘත්තාකාර සිරස් නලයක් තුල ගුරුත්වය යටතේ පෙරලීමට නිදහස්ය. අංශුව නලයෙහි ඉහලම ලක්ෂ්‍යයේ දී $\sqrt{2ag}$ ප්‍රවේගයකින් චලිතය ආරම්භ කරනු ලැබේ. තදනන්තර චලිතයේ දී සිරස් ත්වරණ සංරචකය උපරිම වන විට, අංශුව මගින් නලය මත ඇති කරන තෙරපුම එහි බර මෙන් දෙගුණයක් වන බව පෙන්වන්න.

02) අ) කේන්ද්‍රික බලයක් යටතේ චලනය වන ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවක චලිතය තල වක්‍රයකට සීමාවන බව පෙන්වන්න.

ආ) සුපුරුදු අංකනයෙන්, $P = \frac{\mu}{r^2}$ කේන්ද්‍රික බලයක් යටතේ චලනය වන අංශුවක පථයේ සමීකරණය $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. තව ද අංශුවෙහි වේගය v නම් $v^2 - \frac{2\mu}{r} = c$, බව පෙන්වන්න: මෙහි c යනු නියතයකි. . අංශුව ප්‍රධාන අක්ෂයෙහි දිග $2a$ වූ ඉලිප්සයක චලනය වන්නේ නම් $c = -\frac{\mu}{a}$ බව ද පෙන්වන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

ඇ) ඉහත ආ) හි සඳහන් කේන්ද්‍රික බලය යටතේම ස්කන්ධ m හා M බැගින් වූ අංශු දෙකක් එකම ඉලිප්සයක ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවන් ඔස්සේ ගමන් කරයි. අංශු සුළු අක්ෂය කෙළවරකදී ගැටී හා වේ. සංයුක්ත අංශුව අර්ධ ප්‍රධාන අක්ෂයෙහි දිග $\frac{a(M+m)^2}{(M+m)^2+4Mm}$ වූ ඉලිප්සයක ගමන් කරන බව පෙන්වන්න.

03. අ) ගෝලීය ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක මගින් සුපුරුදු අංකනයෙන් අංශුවක ප්‍රවේගය සහ ත්වරණය පිළිවෙලින්

$\underline{v} = \dot{r}\,\underline{l} + r\dot{\theta}\,\underline{m} + r\dot{\phi}\,sin\theta\,\underline{n}$ සහ

$$\underline{f} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\,sin^2\theta)\underline{l} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 sin\theta cos\theta)\underline{m}$$
$$+\left(\frac{d}{dt}(r\dot{\phi}sin\theta) + r\dot{\theta}\dot{\phi}\,cos\theta + \dot{r}\dot{\phi}sin\theta\right)\underline{n}$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ආ) ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් අරය a වූ ගෝලයක ඇතුලත සුමට පෘෂ්ඨයෙහි චලනය වේ. ආරම්භයේ දී අංශුව ගෝලයෙහි O කේන්ද්‍රයට $acos\alpha$ දුරක් පහලින් වූ ලක්ෂ්‍යයක දී තිරස්ව එහි පෘෂ්ඨය ඔස්සේ කරන ලදි. සුපුරුදු අංකනයෙන් අංශුව කේන්ද්‍රයේ සිට $acos\theta$ පහලින් ඇති විට

$a\dot{\theta}^2 + asin^2\theta\dot{\phi}^2 - 2gacos\theta = v^2 - 2gacos\alpha$ සහ $asin^2\theta\dot{\phi} = vsin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $a^2\dot{\theta}^2 = 2ga(cos\theta - cos\alpha) + \frac{v^2(cos^2\alpha - cos^2\theta)}{sin^2\theta}$ බව පෙන්වන්න.

04. අ) සුපුරුදු අංකනයෙන්, P කේන්ද්‍රික බලයක් යටතේ චලිත වන අංශුවක චලිත සමීකරණය

$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}$ බව පෙන්වන්න.

ආ) දිග a වූ අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් අචලව ගැටගසා අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ගැට ගසා තන්තුව සිරස් වන සේ පද්ධතිය නිසලව තබනු ලැබේ. ඉන් පසු අංශුවට යාන්තමින් වටයක් සම්පූර්ණ කල හැකි වන සේ u තිරස් ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබයි. $u^2 = 5ga$ බව පෙන්වා තන්තුව එහි පහත්ම ලක්ෂ්‍යයේ දී ආතතිය $6mg$ බව පෙන්වන්න.

මතුසම්බන්ධයි...

අංශුව අරය $\frac{6a}{5}$ වූ වෘත්තයක චලනය වේ නම් $h^2 = \frac{216a^3\lambda}{625m}$ බව ද, පරිභ්‍රමණ කාලාවර්තය $2\pi\sqrt{\frac{6ma}{\lambda}}$ බව ද පෙන්වන්න.

අංශුවට දැන් OP හි දිශාව දිගේ කුඩා විශාලත්වයකින් වූ ආවේගයක් දෙනු ලැබේ නම් හා t කාලයෙහි දී තන්තුවේ විතතිය $\frac{a}{5}+y$ නම් ද්විපද ප්‍රමේයය යෙදීමෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\ddot{y}+\frac{3\lambda y}{2ma}=0$ බව පෙන්වන්නත මෙහි y කුඩා වෙයි.

7. O ලක්ෂ්‍යයක් වටා අංශු පද්ධතියක $\underline{H}_0$ කෝණික ගම්‍යතාව අර්ථ දක්වන්න..

සුපුරුදු අංකනයෙන්, O ඔස්සේ යන අක්ෂයක් වටා $\underline{\omega}$ කෝණික ප්‍රවේගයෙන් භ්‍රමණය වන දෘඩ වස්තුවක් සඳහා $\underline{H}_0 = \sum m_i[r_i^2\underline{\omega}-(\underline{r}_i.\underline{\omega})\underline{r}_i]$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන්, සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය අක්ෂ තුනක් දිගේ $\underline{H}_0$ හි සංරචක; H_x, H_y, H_z

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න.

එනයින්, සාධාරණ වශයෙන්, $\underline{H}_0 = n\underline{\omega}$ වන පරිදි O හි දී අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් ලම්බ වූ අක්ෂ තුනක් ඇති බව පෙන්වන්න. මෙහි; n යනු අදිශයකි . තවද $\underline{H}_0 = n\underline{\omega}$ සමීකරණය සපුරාලන n_1, n_2, n_3 අගය තුන, ඉහත සඳහන් අක්ෂ තුන වටා වස්තුවේ අවස්ථිති ඝූර්ණ බව ද, අක්ෂ දෙක බැගින් ගත්කල එම අක්ෂ අනුබද්ධයෙන් වස්තුවේ අවස්ථිති ගුණිතය ශූන්‍ය බව ද පෙන්වන්න.

8. එක එකක ස්කන්ධය m වූ P හා Q අංශු දෙකක් ස්වාභාවික දිග a වූ ද ප්‍රත්‍යස්ථ මාපාංකය λ වූ ද සුමට සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා, රළු තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත . ආරම්භයේ දී PQ මේස දාරයට ලම්බ හා $PQ=a$ වන ලෙස Q මේස දාරය අද්දර තබා ඇත. Q නිසලතාවයෙක් වැටෙන්නට සලස්වනු ලැබේ නම් , $\mu > 2$ නම් P කිසිවිටකත් චලනය නොවන බවද , $\mu = 1$ නම්, $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{am}{\lambda}}$ කාලයකට පසුව P චලනය වන්නට පටන්ගන්නා බව ද පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු මේසය හා P අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ .

05. O එකම මූලය සහිත සමුද්දේශ රාමු දෙකක් එකිනෙකට සාපේක්ෂව $\underline{\omega}$ කෝණික ප්‍රවේගයකින් භ්‍රමණය වේ.

සුපුරුදු අංකනයෙන් ඕනෑම $\underline{X}$ දෛශිකයක් සඳහා $\dfrac{d\underline{X}}{dt} = \dfrac{\partial \underline{X}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge \underline{X}$ බව උපකල්පනය කරමින් එක් රාමුවකට සාපේක්ෂව අංශුවෙහි සාපේක්ෂ ත්වරණය $\dfrac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \dfrac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} + \dfrac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} \wedge \underline{r} + 2\underline{\omega} \wedge \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \times \underline{r})$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න ; මෙහි $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ වේ.

සුපුරුදු අංකනයෙන් පෘථිවි පෘෂ්ඨය ආසන්නයෙහි අංශුවක චලිතය, $|\underline{\Omega}|^2$ ගණයේ හා ඉහළ පද නොසලකා හරිමින් $\dfrac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} + 2\underline{\Omega} \wedge \dfrac{\partial \underline{r}}{\partial t} = \underline{g}$ මගින් විස්තර කළහැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\underline{\Omega}$ යනු පෘථිවියේ කෝණික ප්‍රවේගයයි.

එනයින් ඉහත සන්නිකර්ෂණයම භාවිතයෙන් $\dfrac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} + 2\underline{\Omega} \wedge \underline{g}t + 2\underline{\Omega} \wedge \underline{A} = \underline{g}$ සහ

$$\underline{r} = \frac{-\underline{\Omega} \wedge \underline{g}t^3}{3} - \underline{\Omega} \wedge \underline{A}t^2 + \frac{1}{2}\underline{g}t^2 + \underline{B}t + \underline{C}$$ බව

පෙන්වන්න; මෙහි $\underline{A}, \underline{B}$ සහ $\underline{C}$ යනු නියත දෛශික වේ.

ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් පෘථිවි පෘෂ්ඨයේ සිට h උසකින් නිසලව මුදා හරිනු ලැබේ. පෘථිවි අක්ෂය වටා එහි කෝණික ප්‍රවේගය ω නියත බව උපකල්පනය කරමින් අංශුව t කාලයකට පසුව ආරම්භක සිරස් අක්ෂයේ සිට $\frac{1}{3}\omega g t^3 \sin\lambda$ දුරක් නැගෙනහිරට අපගමනය වන බව පෙන්වන්න.

6. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත චලනය වීමට නිදහස් වන අතර, ස්වාභාවික දිග a වූ ප්‍රත්‍යාස්ථ සැහැල්ලු තන්තුවක එක් කෙළවරකට ගැට ගසා ඇත; තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර මේසය මත වූ O ලක්ෂ්‍යයකට සවි කර ඇත.

තන්තුවේ විතතිය x වන විට, අංශුවේ චලිත සමීකරණ ලියා දක්වා $\ddot{x} + \dfrac{\lambda x}{ma} = \dfrac{h^2}{(a+x)^3}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි λ යනු තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය හා h යනු නියතයක් වෙයි.

මතුසම්බන්ධයි...