කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

විද්‍යාවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි ප්‍රථම පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2009 (පැරණි නිර්දේශය)

2013 ජූලි

විද්‍යා පීඨය

ව්‍යවහාරික ගණිතය - **AMAT 102**

<u>ප්‍රශ්න හයකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.</u>

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව : 08 යි. | පිටු සංඛ්‍යාව : 04 යි | කාලය : පැය 03 යි.

---

1. සුපුරුදු අංකනයෙන්, සිලින්ඩරාකාර ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංකවලින් අංශුවක $\underline{v}$ ප්‍රවේගය $\underline{v} = \dot{r}\,\underline{l} + r\dot{\theta}\,\underline{m} + \dot{z}\,\underline{n}$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.
සිලින්ඩරාකාර ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංකවලින් අංශුවේ ත්වරණය සොයන්න.

ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත පිහිටන අතර, මේසයෙහි O කුඩා සුමට සිදුරක් ඔස්සේ යන ලුහු අප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවකින් ස්කන්ධය $2m$ වූ Q අංශුවකට, තන්තුවේ OQ කොටස සිරස් වන සේ ගැට ගසා ඇත.ආරම්භයේදී තන්තුව නුබුරුල් ද $OP = a$ ද වන අතර අංශුවට OP ට ලම්බව මේසය දිගේ v ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ.

අංශුව සඳහා වෙන වෙනම චලිත සමීකරණ ලියා දක්වා, තන්තුව ප්‍රමාණවත් දිගින් යුක්ත නම්, $r^2\dot{\theta} = av$ හා $3\dot{r}^2 + 4gr + \dfrac{av^2}{r^2} = 4ga + v^2$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $r = OP$.

ඒ නයින්, $r = \dfrac{v^2 + v\sqrt{v^2 + 6ga}}{8g}$ හිදී නැවතත් $\dot{r} = 0$ බව පෙන්වන්න.

v^2, $2ga$ ට වඩා විශාල වීම හෝ කුඩා වීම මත r වැඩි වන හෝ අඩුවන බව ද පෙන්වන්න.
$v^2 = 2ga$ නම් P අංශුව අරය a වෘත්තයක් ගෙවා යන බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි ...

2, සුපුරුදු අංකනයෙන්, ඒකක ස්කන්ධයට P කේන්ද්‍රික බලයක් යටතේ චලනය වන අංශුවක පථය සඳහා $\dfrac{d^2u}{d\theta^2}+u=\dfrac{P}{h^2u^2}$ අවකල සමීකරණය ලබාගන්න.

X නම් අංශුවක් ඒකක ස්කන්ධයට $\dfrac{\mu}{r^5}$ කේන්ද්‍රික බලයක් යටතේ චලනය වෙයි ; මෙහි μ නියතයක් වන අතර r යනු බල කේන්ද්‍රය O සිට අංශුවට ඇති දුර වෙයි. $\sqrt{\dfrac{\mu}{2a^4}}$ ප්‍රවේගයකින් O සිට a දුරකින් පිහිටි A ලක්ෂයක සිට OA ට ලම්බව X ප්‍රක්ෂේපණය කෙරෙයි නම් , එය විෂ්කම්භය OA වූ වෘත්තයක් ගෙවා යන බව සහ $\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{8\mu}}$ කාලයට පසුව එය O ට ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

3. සුපුරුදු අංකනයෙන් $P=\dfrac{\mu}{r^2}$ කේන්ද්‍රික බලයක් යටතේ චලිතවන අංශුවක පෙතෙහි සමීකරණය

$$\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$$

ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු නියතයකි.

අංශුව ඉලිප්සයක චලනය වන්නේ නම්, සුපුරුදු අංකනයෙන්, $v^2-\dfrac{2\mu}{r}=-\dfrac{\mu}{a}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි a යනු ඉලිප්සයේ අර්ධ-ප්‍රධාන අක්ෂයෙහි දිග වෙයි. O සිට ඉලිප්සයේ සුළු අක්ෂයෙහි කෙළවරකට ඇති දුර a බව ද පෙන්වන්න.

ස්කන්ධ m හා M වූ අංශු දෙකක් ඉහත දී ඇති කේන්ද්‍රික බලය යටතේ අර්ධ ප්‍රධාන අක්ෂය a වූ එකම ඉලිප්සයක ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශා ඔස්සේ යයි. අංශු සුළු අක්ෂයෙහි කෙළවරකදී ගැටී හාවෙයි. $M\neq m$ නම් නව කක්ෂය ඉලිප්සයක් බව පෙන්වා එහි මහා අක්ෂයෙහි දිග $\dfrac{a(M+m)^2}{(M+m)^2+4Mm}$ බව පෙන්වන්න.

$M = m$ නම් කුමක් සිදුවේ ද ?

4, ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් අරය a වූ සුමට ගෝලයක අන්තඃපෘෂ්ඨය දිගේ චලනය වෙයි, ආරම්භයේදී අංශුව ගෝලයෙහි O කේන්ද්‍රයෙන් $a\cos\alpha$ ගැඹුරකින් වූ v ප්‍රවේගයෙන් පෘෂ්ඨය දිගේ තිරස්ව ප්‍රක්ෂේපණය කෙරෙයි, සුපුරුදු අංකනයෙන් , අංශුව O සිට $a\cos\theta$ ගැඹුරකින් වූ විට, $a\dot{\theta}^2+a^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2-2ga\cos\theta=v^2-2ga\cos\alpha$ හා $a\sin^2\theta\,\dot{\phi}=v\sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් , $a^2\dot{\theta}^2=2ga(\cos\theta-\cos\alpha)+v^2\dfrac{(\cos^2\alpha-\cos^2\theta)}{\sin^2(\theta)}$ බව පෙන්වන්න.

$v=\sqrt{6ga}$ හා ආරම්භයේදී අංශුව O සිට $\dfrac{3a}{4}$ ගැඹුරකින් වේ නම්, $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ හෝ $-\dfrac{1}{2}$ හි දී $\dot{\theta}=0$ බව පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි ...

5. එකකට සාපේක්ෂව අනෙක භ්‍රමණය වන සමුද්දේශ රාමු දෙකක් අනුබද්ධයෙන් $\underline{A}$ දෛශිකයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් $\frac{d\underline{A}}{dt} = \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge \underline{A}$ බව උපකල්පනය කර $\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} + \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} \wedge \underline{r} + 2\underline{\omega} \wedge \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} + \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{r})$ යන්න ව්‍යුත්පන්න කරන්න; මෙහි $\underline{r}$ යනු රාමු දෙකේ පොදු මූලය අනුබද්ධයෙන් අංශුවක පිහිටුම් දෛශිකය වෙයි.

පෘථිවි පෘෂ්ඨය ආසන්නයේදී, ගුරුත්වය යටතේ චලනය වන P අංශුවක චලිත සමීකරණ, පෘථිවිය සමග භ්‍රමණය වන, පෘථිවි පෘෂ්ඨයෙහි වූ O මූලය සහිත සමුද්දේශ රාමුවක් අනුබද්ධයෙන් , $\frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} = \underline{g} - 2\underline{\Omega} \wedge \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} - \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{r})$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\underline{\Omega}$ යනු සිය අක්ෂය වටා පෘථිවියේ කෝණික ප්‍රවේගයද $\underline{g}$ යනු ගුරුත්වය නිසා වූ ත්වරණයද , $\underline{r} = \overrightarrow{OP}$ ද වෙයි .

අංශුවක් පෘථිවි පෘෂ්ඨයෙහි අක්ෂාංශය $\lambda^0 N$ වූ O' ලක්ෂ්‍යයකින් $\underline{u}$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කෙරේ නම් $|\underline{\Omega}|^2$ හා ඉහල ගණවල පද නොසලකමින් , සුපුරුදු අංකනයෙන්, ප්‍රක්ෂේපනයෙන් t කාලයකට පසු $\underline{r} = \underline{u}t + \frac{1}{2}\underline{g}t^2 - (\underline{\Omega} \wedge \underline{u})t^2 - \frac{1}{3}(\underline{\Omega} \wedge \underline{g})t^3$ බව පෙන්වන්න.

අංශුවක් නැගෙනහිර බටහිර අක්ෂය ඔස්සේ යන සිරස් තලයෙහි තිරසට α කෝණයකින් නැගෙනහිර දිශාවට ප්‍රක්ෂේප කෙරේ නම්, $O'x$ හා $O'y$ පිළිවෙලින් දකුණු හා නැගෙනහිර දිශා දිගේ වන සේ O' හිදී $O'xyz$ සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසීය අක්ෂ ගෙන $\underline{u} = (0, u\cos\alpha, u\sin\alpha)$ හා $\underline{\Omega} = (-\Omega\cos\lambda, 0, \Omega\sin\lambda)$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $u = |\underline{u}|$ හා $\Omega = |\underline{\Omega}|$ වෙයි. එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, සුපුරුදු අංකනයෙන්

$$x = t^2\Omega u \sin\lambda\cos\alpha$$

$$y = tu\cos\alpha - t^2\Omega u\sin\alpha\cos\lambda + \frac{t^3}{3}g\Omega\cos\lambda$$

$$z = tu\sin\alpha - \frac{t^2 g}{2} + t^2\Omega u\cos\alpha\cos\lambda \ .$$

බව පෙන්වන්න.

6. තල ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංකවලින් ප්‍රවේග හා ත්වරණ සංරචක සොයන්න.

ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් සුමට තිරස් මේසයක් මත චලනය වීමට නිදහස් වන අතර, ස්වාභාවික දිග a වූ ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට ගැට ගසා ඇත; තන්තුවේ O අනෙක් කෙළවර මේසය මත වූ ලක්ෂ්‍යයකට සවි කර ඇත.

තන්තුවේ විතතිය x වන විට, තන්තුව නොගිණිය හැකි ස්කන්ධයෙන් යුක්ත යැයි උපකල්පනය කරමින්, අංශුවේ චලිත සමීකරණ ලියා දක්වා $\ddot{x} + \frac{\lambda x}{ma} = \frac{h^2}{(a+x)^3}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි λ යනු තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය හා h යනු නියතයක් වෙයි.

අංශුව අරය $\frac{6a}{5}$ වූ වෘත්තයක චලනය වේ නම් $h^2 = \frac{216a^3\lambda}{625m}$ බව ද, පරිභ්‍රමණ කාලාවර්තය $2\pi\sqrt{\frac{6ma}{\lambda}}$ බව ද පෙන්වන්න.

මතු සම්බන්ධයි ...

අංශුවට දැන් OP හි දිගාව දිගේ කුඩා විශාලත්වයකින් වූ ආවේගයක් දෙනු ලැබේ නම් හා t කාලයෙහිදී තන්තුවේ විතතිය $\frac{a}{5}+y$ නම් ද්විපද ප්‍රමේයය යෙදීමෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\ddot{y}+\frac{3\lambda y}{2ma}=0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි y කුඩා වෙයි.

ඒ නයින්, අංශුව සිය මුල් වෘත්තාකාර පෙත වටා දෝලනය වන බවත්, දෝලනයේ කාලාවර්තය මුල් පරිභ්‍රමණ කාලාවර්තයෙන් තුනෙන් එකක් බවත් පෙන්වන්න.

7. O ලක්ෂ්‍යයක් වටා අංශු පද්ධතියක $\underline{H}_0$ කෝණික ගම්‍යතාව අර්ථ දක්වන්න..

සුපුරුදු අංකනයෙන් , O ඔස්සේ යන අක්ෂයක් වටා $\underline{\omega}$ කෝණික ප්‍රවේගයෙන් භ්‍රමණය වන දෘඩ වස්තුවක් සඳහා $\underline{H}_0=\sum m_i[r_i^2\underline{\omega}-(\underline{r}_i.\underline{\omega})\underline{r}_i]$ ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O හිදී සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසීය අක්ෂ තුනක් දිගේ $\underline{H}_0$ හි H_x, H_y, H_z සංරචක $\begin{pmatrix}H_x\\H_y\\H_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & -F & -E\\-F & B & -D\\-E & -D & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න.

ඒනයින්, සාධාරණ වශයෙන්, $\underline{H}_0=n\underline{\omega}$ වන පරිදි O හි අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් ලම්බ වූ අක්ෂ තුනක් ඇති බව පෙන්වන්න. මෙහි; n යනු අදිශයකි . තවද $\underline{H}_0=n\underline{\omega}$ සමීකරණය සපුරාලන n_1, n_2, n_3 අගය තුන ඉහත සඳහන් අක්ෂ තුන වටා වස්තුවේ අවස්ථිති ඝූර්ණ බව ද, ඉහත සඳහන් අක්ෂ දෙක බැගින් ගත්කල ඒ අනුබද්ධයෙන් වස්තුවේ අවස්ථිති ගුණිතය ශූන්‍ය බව ද පෙන්වන්න.

8. එක එකක ස්කන්ධය m වූ P හා Q අංශු දෙකක් ස්වාභාවික දිග a වූ ද ප්‍රත්‍යස්ථ මාපාංකය λ වූ ද සුමට සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා රළු තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත . ආරම්භයේ දී PQ මේස දාරයට ලම්බ හා $PQ=a$ වන ලෙස Q මේස දාරය අද්දර තබා ඇත. Q නිසලතාවයෙක් වැටෙන්නට සලස්වනු ලැබේ නම් , $\mu>2$ නම් P කිසිවිටකත් චලනය නොවන බවද , $\mu=1$ නම්, $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{am}{\lambda}}$ කාලයකට පසුව P චලනය වන්නට පටන්ගන්නා බව ද පෙන්වන්න; මෙහි μ යනු මේසය හා P අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ .

//