කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය ශ්‍රී ලංකාව

දුරස්ථ සහ අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන කේන්ද්‍රය

ශාස්ත්‍රවේදී (සාමාන්‍ය) උපාධි පරීක්ෂණය (බාහිර) - 2024

ව්‍යවහාරික ගණිතය

AMAT E 1025 - යාන්ත්‍රික විද්‍යාව I

ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව: හතයි (07) | පිටු සංඛ්‍යාව: තුනයි (03) | කාලය: පැය තුනයි (3)

ප්‍රශ්න පහකට (06) පමණක් පිළිතුරු සපයන්න .

Q1. (a) පද්ධතියක i වැනි අංශුවක් මත $\underline{F}_i$ සම්ප්‍රයුක්ත බාහිර බලයක් හා $\sum_j \underline{F}_{ij}$ අභ්‍යන්තර බල ක්‍රියා කරයි . මෙහි $\underline{F}_{ij}$ යනු j වැනි අංශුව නිසා i වැනි අංශුව මත වූ බලය වෙයි.

M යනු මුළු ස්කධය, $\underline{V}_G$ යනු ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයෙහි ප්‍රවේගය හා $\underline{H}_0$ යනු අචල ලක්ෂයක් වටා පද්ධතියේ කෝණික ගම්‍යතාව නම්, කරනලද උපකල්පන ප්‍රකාශ කරමින්, $\sum_i \underline{F}_i = \frac{d}{dt}(M\underline{V}_G)$ සහ $\sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \frac{d\underline{H}_0}{dt}$ බව පෙන්නන්න. මෙහි $\underline{r}_i$ යනු O අනුබධයෙන් i වැනි අංශුවේ පිහිටුම් දෛශිකය වේ.

(b) දිග $2a$ හා ස්කන්ධය m වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් , එය මතවූ C ලක්ෂයක් වට සිරස් තලයක නිදහසේ භ්‍රමණය වීමට හැකිය. මෙහි $AC = x(< a)$ වේ.

i. C වටා දණ්ඩෙහි අවස්ථිති ඝූර්ණය සොයන්න.

ii. දණ්ඩ තිරස් පිහිටුමක සිට නිසලතාවයෙන් මුදා හැරේ නම් , C වටා දණ්ඩ මත ක්‍රියාකරන බල වල ඝූර්ණ ගැනීමෙන් හා එසේ ලබාගන්නා සමීකරණ අනුකලනය කිරීමෙන්, උපනුක්‍රම චලිතයේදී

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6g(a-x)\sin\theta}{a^2 + 3(a-x)^2}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහි θ යනු දණ්ඩ හා තිරස අතර කෝණය වේ.

Q2. (a) තලයක් මත අංශුවක චලිතය $r = f(\theta)$ මගින් නිරූපණය කරන්නේ නම් , එවිට අංශුවේ අරීය සහ තිරයක් ත්වරණ සංරචක පිළිවෙලින් $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ සහ $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(b) අංශුවක් $r = ae^{-b\theta}$ සමීකරණයෙන් විස්තර කර ඇති සර්පිලාකර (spiral) මාගර්යක ගමන්කරනුයේ $\dot{\theta}$ නියතයක් වන පරිද්දෙනි.මෙම අවස්ථාවේදී අංශුවේ අරීය සහ තීරයක් ත්වරණ සංරචක ලබාගන්න. එමගින්, ත්වරණ අතර අනුපාතය $\left(\frac{1-b^2}{2b}\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි a, b නියත වේ.

(c) ස්කන්ධ $2M$ සහ M වන අංශු දෙකක් පිළිවෙලින් u සහ $2u$ ප්‍රවේග වලින් සරල රේඛාවක් ඔස්සේ එකම දිශාවට චලනය වේ. පද්ධතියේ මුළු චාලක ශක්තිය K හා මුළු ගම්‍යතාව P නම්

$$K - \frac{P^2}{6M} = \frac{Mu^2}{3}$$

බව සාධනය කරන්න.

Q3. (a) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ඒකක ස්කන්ධයක F කේන්ද්‍රික බලයක් යටතේ චලනය වෙන අංශුවක පථය සඳහා

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{h^2u^2}$$

අවකල සමීකරණය ලබාගන්න. මෙහි $u = \frac{1}{r}, \dot{\theta} = hu^2$ වේ .

(b) අංශුවක් කේන්ද්‍රය දෙසට යොමුව $F = \mu r^{-3}$ බලයක් යටතේ කේන්ද්‍රයට c දුරකින් $\frac{\mu}{2c^2}$ ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේපනය කෙරේ. අංශුවේ කක්ෂයේ සමීකරණය ලබාගන්න. මෙහි μ නියත වේ.

Q4. (a) අචල ලක්ෂයක් දෙසට යොමුව කේන්දික බලයක් යටතේ චලනය වන ස්කන්ධය වූ අංශුවක චලිතය තල වක්‍රයකට සීමාවන බව පෙන්වන්න

(b) අංශුවක් කේන්ද්‍රය දිශාවට යොමුවී ඇති F බලයක් යටතේ කවය $r = 2a\cos\theta$ පරිදි වූ පථයක් විස්තර කරයි . F සොයන්න .

(c) ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් $m\mu\,(3au^4 - 2(a^2-b^2)u^5), a > b$ බලයකට යටත් වන අතර, එය $\frac{\sqrt{\mu}}{(a+b)}$ ප්‍රවේගයෙන් $(a+b)$ දුරකින් ඇති ඇප්සෙ (apse) එකකින් ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. අංශුවේ පථයේ සමීකරණය $r = a + b\cos\theta$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

Q5. (a) ස්කන්ධය M වූ දිග a සහිත ඒකාකාර දණ්ඩක, එහි මාධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වටා අවස්ථිති ඝූර්ණය I සොයන්න.

(b) එමගින් හෝ අනයුරකින් හෝ, එම දණ්ඩේ එක් අන්තයක් වටා අවස්ත්ති ඝූර්ණය $\left(I + \frac{Ma^2}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(c) සාමාන්‍ය කුඩා ගලවාගැනීමේ හෙලිකොප්ටරයක සෑම එකක්ම දිග l සහ ස්කන්ධයක් m සහිත තල හතරකින් යුක්තවේ. තල, ඒවායේ දිගට ලම්භක අක්ෂයක එක් කෙළවරක් වටා භ්‍රමණය වන තුනීදඬු ලෙස දළවශයෙන් දැක්විය හැක. හෙලිකොප්ටරයේ මුළු ස්කන්ධය M නම්, හෙලිකොප්ටරයක v ප්‍රවේගයෙන් ගමන් කරන මොහොතේ පද්ධතියේ මුළු චාලක ශක්තිය

$$\frac{v^2}{6}\,(3M + 4m)$$

මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

Q6. (a) O එකම මූලය සහිත සමුද්දේශ රාමු දෙකක් එකිනෙක අනුබද්ධයෙන් $\underline{\omega}$ කෝණික ප්‍රවේගයෙන් භ්‍රමණය වේ. සුපුරුදු අංකනයෙන්, ඕනෑම $\underline{X}$ දෛශිකයක් සඳහා $\dfrac{d\underline{X}}{dt} = \dfrac{\partial \underline{X}}{\partial t} + \underline{\omega} \times \underline{X}$ බව උපකල්පනය කරමින්, රාමු දෙකෙහි අංශුවේ ත්වරණය

$$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} + \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} \times \underline{r} + 2\underline{\omega} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න . මෙහි $\underline{r} = \vec{OP}$ වේ.

(b) සුපුරුදු අංකනයෙන්, පෘථිවි පෘෂ්ඨය ආසන්නයෙහි අංශුවක චලිතය, $|\Omega|^2$ ගණයේ පද නොසලකා හරිමින්,

$$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} + 2\underline{\Omega} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} = \underline{g}$$

මගින් විස්තරකල හෙකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $\underline{\Omega}$ යනු පෘථිවියෙහි කෝණික ප්රවේගයයි.

(c) එමගින්

$$\frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial t^2} + 2\underline{\Omega} \times \underline{g}t + 2\underline{\Omega} \times \underline{A} = \underline{g} \text{ සහ } \underline{r} = -\frac{\underline{\Omega} \times \underline{g}t^3}{3} - \underline{\Omega} \times \underline{A}t^2 + \frac{1}{2}\underline{g}t^2 + \underline{B}t + \underline{C}$$

බව පෙන්වන්න. මෙහ $\underline{A}, \underline{B}$ සහ $\underline{C}$ යනු නියත දෛශිකය වේ.

Q7. (a) O ලක්ෂයකදි අංශු පද්ධතියක් සඳහා කෝණික ගම්‍යතාවය $\underline{H}_0$ අර්ථ දක්වන්න.

(b) සුපුරුදු අංකනයෙන් , O ඔස්සේ යන අක්ෂයක් වටා $\underline{\omega}$ කෝණික ප්‍රවේගයෙන් භ්‍රමණය වන දෘඩ වස්තුවක් සඳහා

$$\underline{H}_0 = \sum_i m_i \left(r_i^2 \underline{\omega} - (\underline{r}_i \cdot \underline{\omega})\, \underline{r}_i \right)$$

ලෙස ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

(c) O හිදී සෘජුකොනාශ්‍ර කාටීසිය අක්ෂ තුන දිගේ $\underline{H}_0$ හි H_x, H_y සහ H_z සංරචක

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කල හැකි බව පෙන්වන්න.

~~~~~~~~~~~~~~~~~~
~~~~~~~~~~~~~~~~~~